



# Wichmann R.R. Py-Lo

“für Eisenbahnlandmesser”

2013-10-12  
por J.G. Fernández





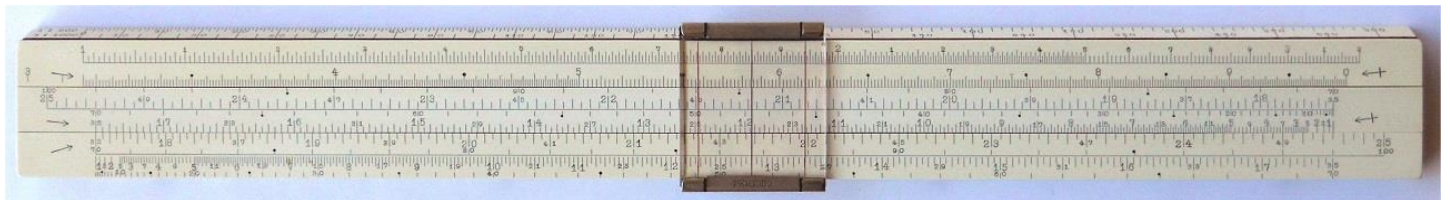
## 1.- INTRODUCCIÓN

Esta es la historia de una investigación, de cómo la intriga sobre una regla de cálculo especial lleva a estudiar sus distintos detalles con objeto de comprender su diseño y el uso que se haría de la misma en el ejercicio diario de un ingeniero.

Por este motivo, y para hacer la lectura un poco más amena, he mantenido en lo posible la evolución temporal de esta investigación. ¡Espero que esto ayude a llegar a su final!

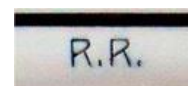
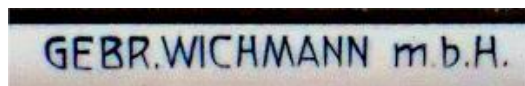
## 2.- LA REGLA DE CÁLCULO

Esto es lo que felizmente conseguí hace un tiempo: una nueva regla de cálculo para mi colección, y ¡bastante especial!



Se trata de una regla de 349 x 34-37 x 11,5 mm, en una caja de cartón negra que se abre por un extremo, pero sin la solapa de cierre (aunque sí queda el botón de cierre en su sitio).

A primera vista no se reconoce ninguna escala común, tampoco hay letras para su identificación, pero sí se ven unas flechas misteriosas a cada extremo. Por otro lado, en el canal bajo la reglilla encontramos las primeras pistas, incluyendo el nombre del fabricante:



Y también entre las tablas en papel en el reverse de la reglilla se encuentra la siguiente indicación:

**Für Eisenbahnland-  
messer:**

Esta regla, por tanto, está pensada para el "Eisenbahnlandmesser", o, más o menos, el topógrafo ferroviario. Tras esta intrigante afirmación, veamos si hay algún otro detalle revelador. Si miramos ahora al cursor, también encontramos dos indicaciones, un nombre y una patente:



Sin embargo, la patente nos demuestra que el cursor es de D&P, una sustitución posterior del original.

**PATENTSCHRIFT**

№ 460 301

KLASSE 42m GRUPPE 33

D 54376 IX/42m

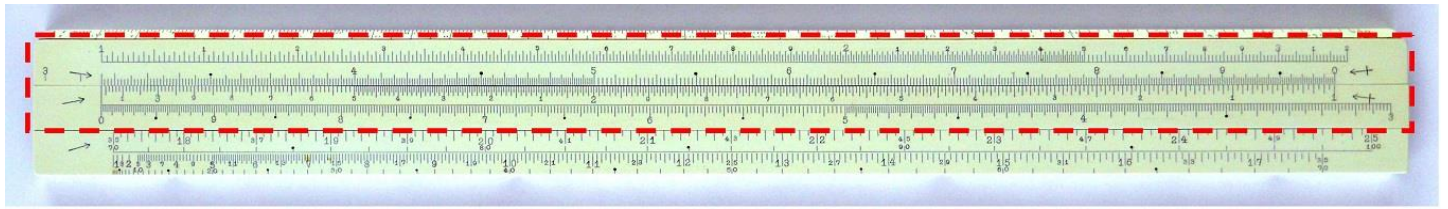
Tag der Bekanntmachung über die Erteilung des Patents: 3. Mai 1928.

Dennert & Pape in Altona.

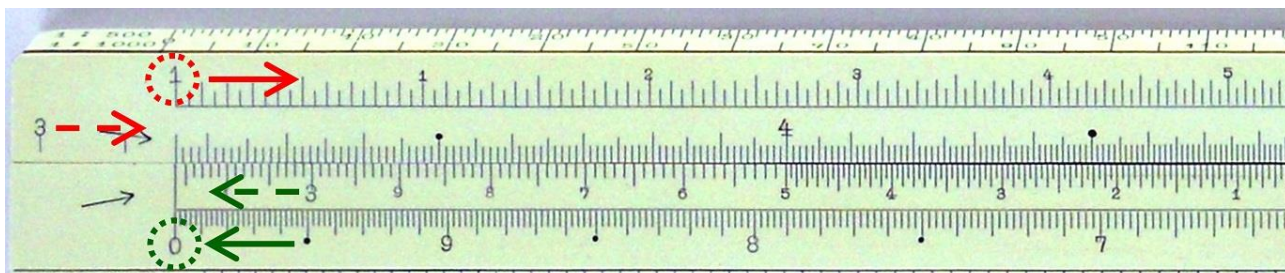


### 3.- LA DISTRIBUCIÓN DE ESCALAS

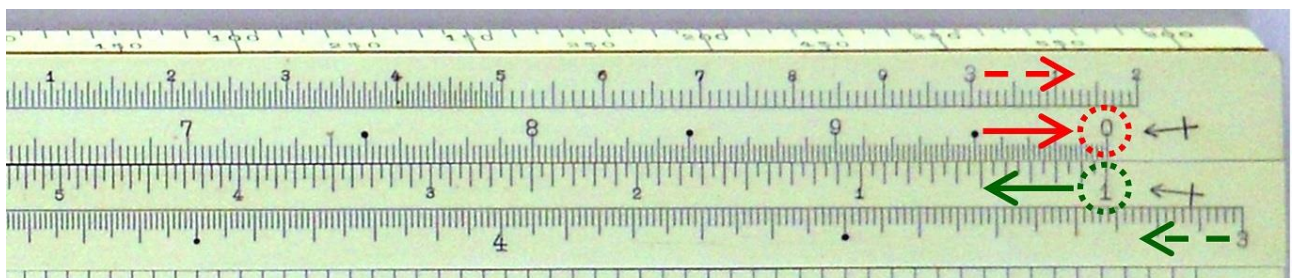
Lo primero que un examen detallado nos permite reconocer es que las escalas de la parte superior del cuerpo son las dos mitades de una escala logarítmica de doble longitud, (dividida en 3,162), al igual que en la reglilla.



Además, también se ve que las escalas de la reglilla están invertidas respecto de las del cuerpo. Otros detalles específicos son la indicación del 10 de la escala con un 0 (normalmente se usa un 1 o un 10), y que en el extremo con 3,162 de cada mitad, se ha incluido esta marca y no la "regular" 3,16.



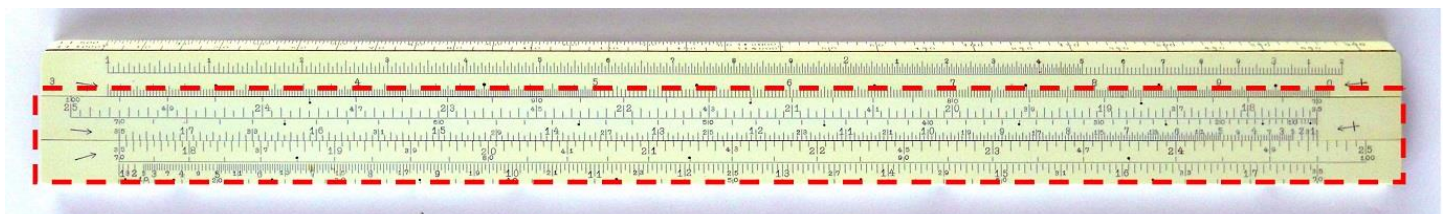
(Parte superior izquierda)



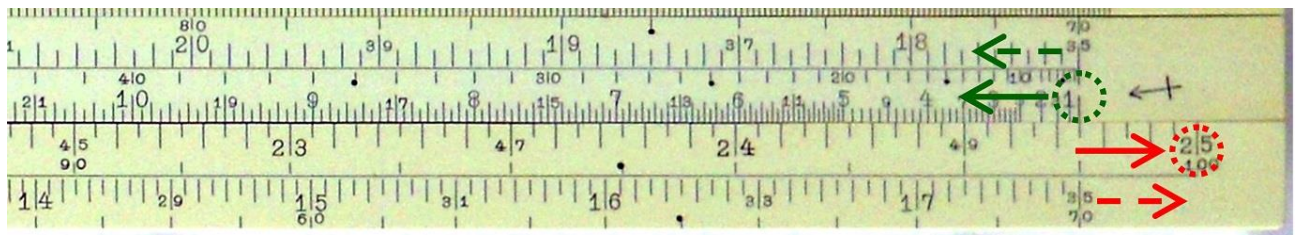
(Parte superior derecha)

Por último, también destacar que las flechas de la derecha llevan una raya cruzada, pero no así las de la izquierda (y siguen siendo un misterio).

Si ahora examinamos las escalas de la parte inferior del cuerpo, en primer lugar podemos comprobar que hay que darle la vuelta a la reglilla para ver un grupo de escalas complementario, aunque de nuevo invertido:



Aquí también podemos ver que las escalas están divididas en dos mitades, pero parece haber dos líneas de base (¿dos escalas?) en cada mitad, además de tres series progresivas de números, empezando por 0 (¡no 1!) y terminando en 25, 50 y 100. ¡Una primera impresión bastante liante!



(Parte inferior derecha)



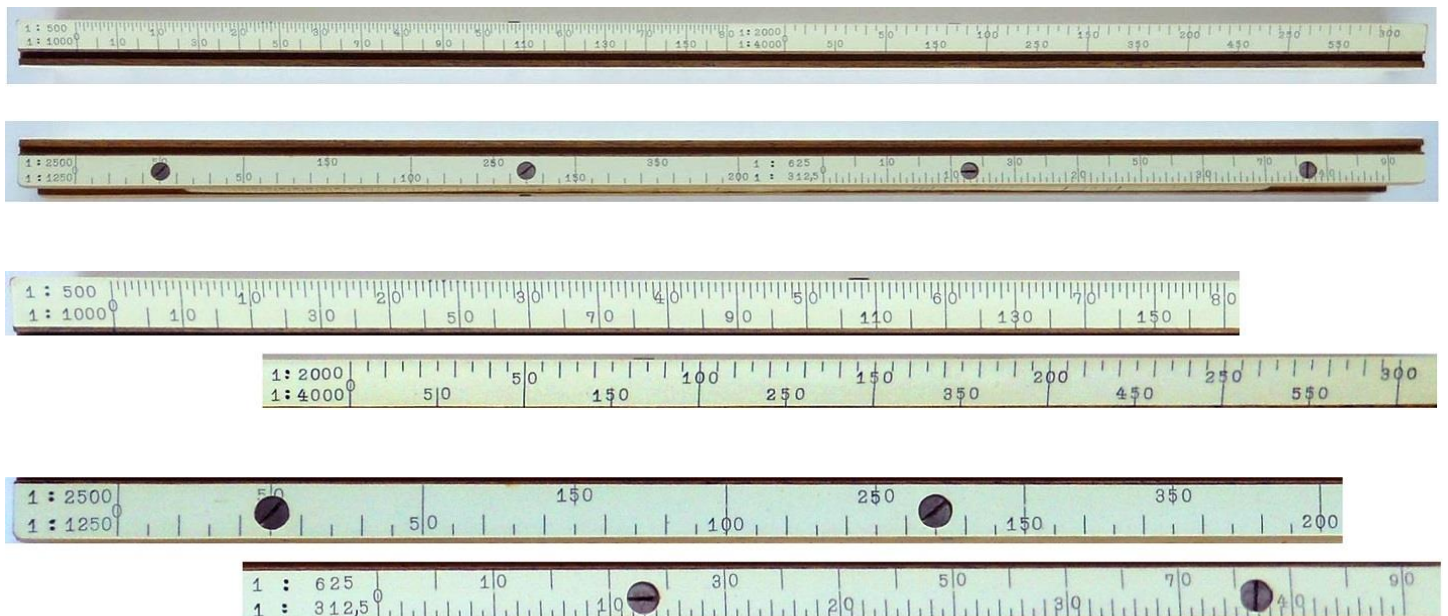
(Parte inferior izquierda)

Y de nuevo las mismas flechas señalan los extremos de las escalas tanto en el cuerpo como en la reglilla.

En resumen, el frontal parece incluir solo dos grupos de escalas con que calcular. Un grupo es conocido (una escala de precisión como las "W" en la Faber Castell 2/83, o como en la Nestler Nr.27), pero el otro es desconocido. No solo hay en éste una mezcla de números, sino que además la distancia entre éstos crece progresivamente con los mismos (al contrario de las escalas logarítmicas).

#### 4.- LAS OTRAS PARTES DE LA REGLA

En las caras laterales de la regla de cálculo (una inclinada y la otra perpendicular), hay escalas para la medida de distancias en mapas (escalímetros):

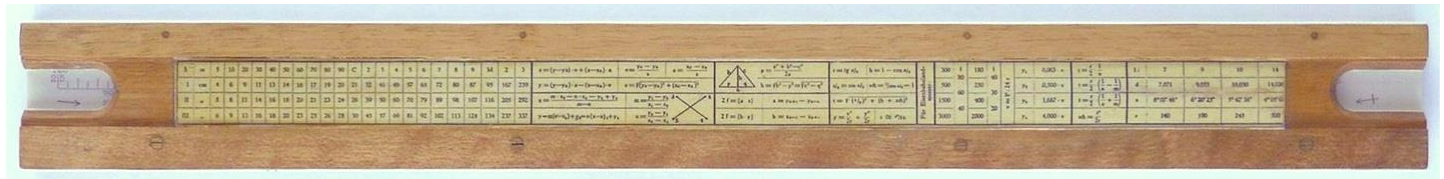


Hay ocho escalas de conversión distintas, permitiendo una amplia cobertura en esta funcionalidad, en consonancia con la de los conocidos conjuntos en abanico de escalímetros con una funda, como el Aristo 1322, (integrando así este útil):





En el reverso de la regla hay una serie de tablas y fórmulas a primera vista desconocidas, junto con la indicación "für Eisenbahnlandmesser" ya mencionada:



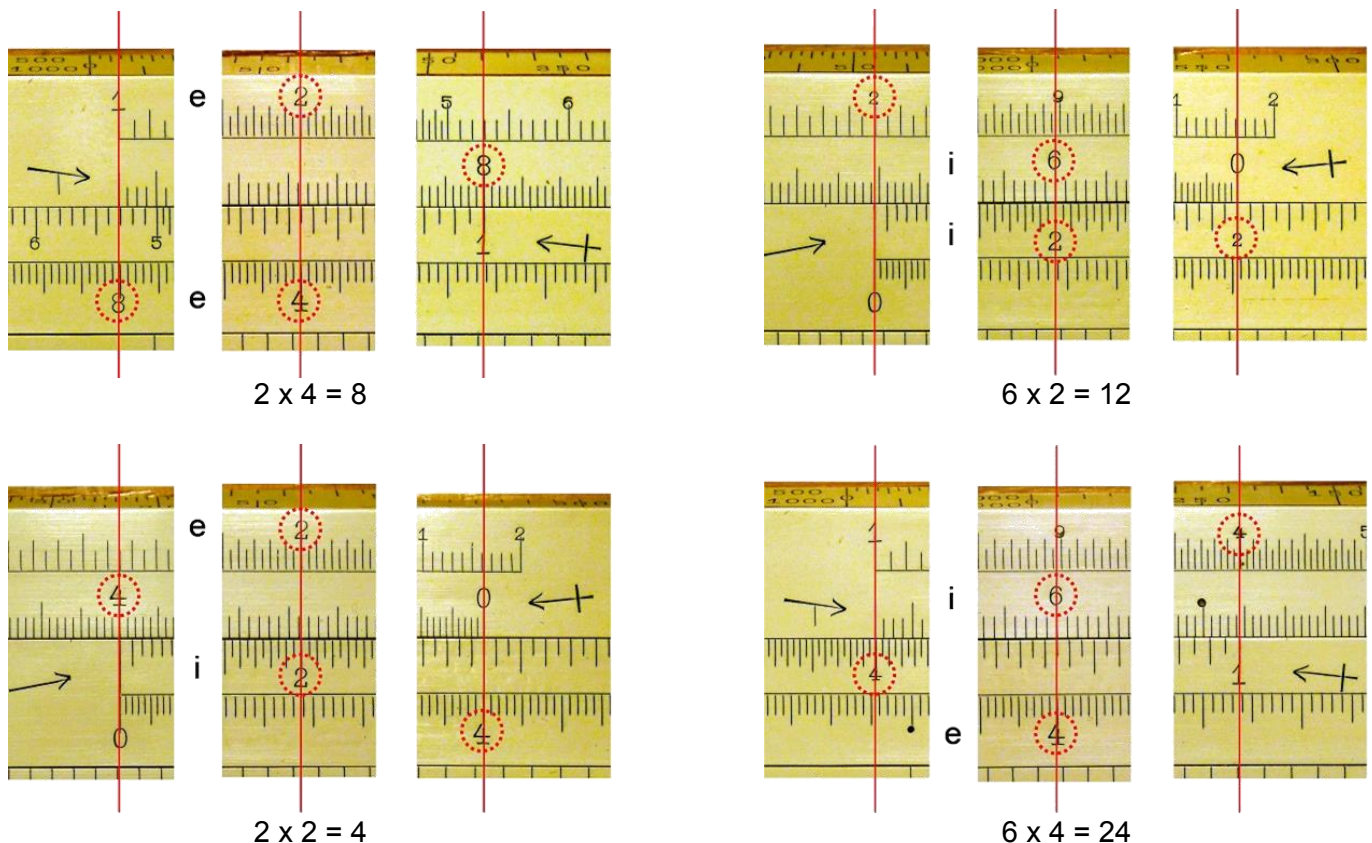
Y con esto terminamos el examen preliminar de la regla de cálculo. Todavía hay mucho que desconocemos, con lo que hace falta un estudio más detallado. Como continuación, entonces, podemos aprovecharnos de nuestro conocimiento sobre las escalas superiores para intentar averiguar el significado de las flechas.

### 5.- ESCALAS LOGARÍTMICAS: CÁLCULOS

Ya hemos mencionado que las escalas en la reglilla están invertidas respecto a las del cuerpo; así, la multiplicación se inicia enfrentando ambos números y el resultado se lee enfrentado al 1 o al 10 de la escala respectiva.

Como tenemos dos mitades en cada escala, podemos nombrar como "e", externas, a las más alejadas de la línea de contacto entre cuerpo y reglilla, e "i", internas, a las mitades más cercanas a la misma. De este modo, podemos identificar cuatro tipos de parejas posibles de números a multiplicar, en función de la mitad de la escala en que se encuentran: (e x e), (i x i), (e x i), o (i x e).

Veamos gráficamente estos cuatro casos con ejemplos sencillos. Sólo se presentan los fragmentos de la regla relevantes para la operación, para así permitir un buen detalle en las imágenes (que son cortes de una sola imagen original).





De estas imágenes podemos correlacionar lo siguiente:

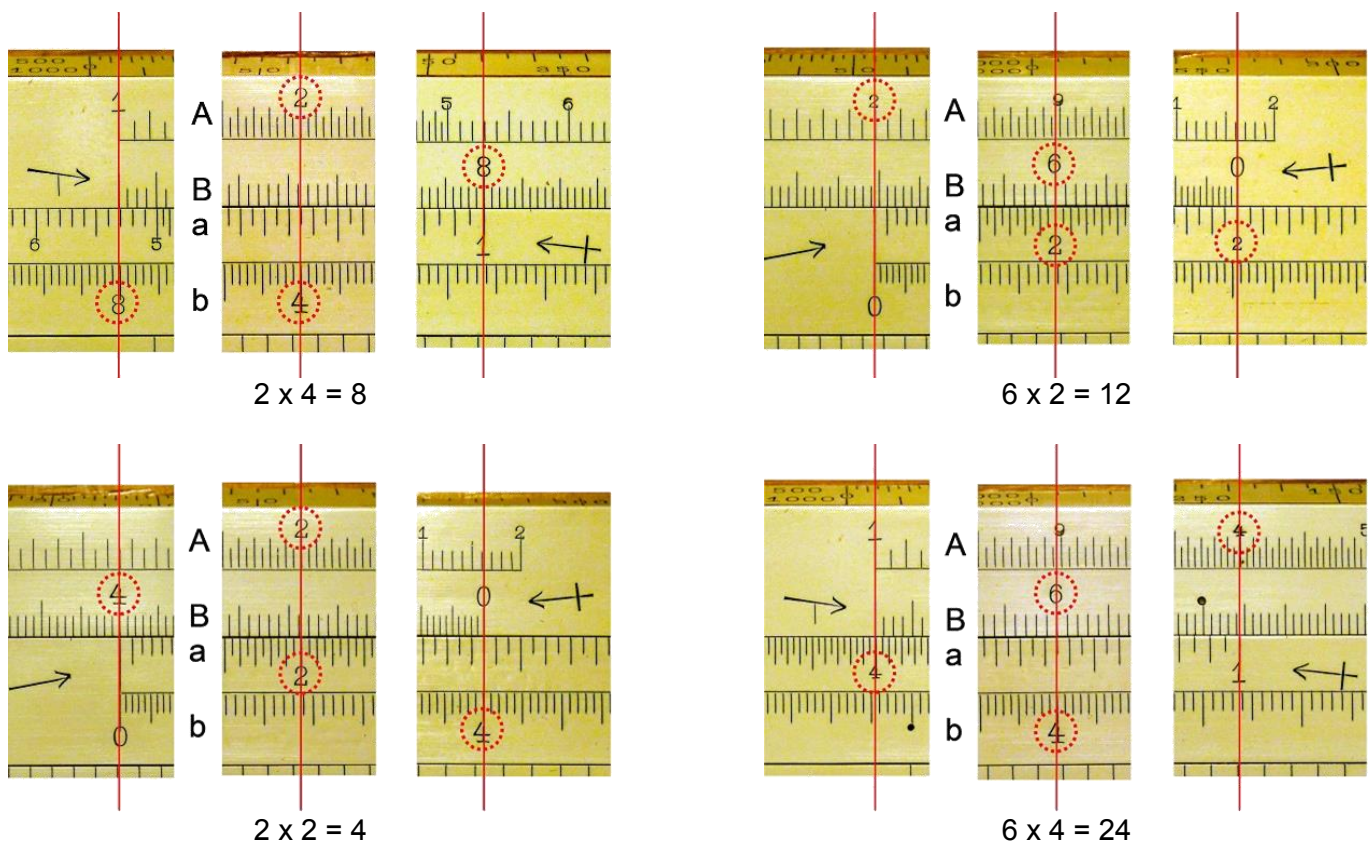
- la mitad de la escala donde se halla el resultado,
- el tipo de flecha (normal a la izquierda o “cruzada” a la derecha),
- la combinación de mitades de escala con que se inicia la multiplicación,

Y podemos considerar que hay que “saltar” cuando el resultado esté en la mitad exterior de la escala. Con todo esto en mente, podemos generar una tabla. En ésta situaremos el par de escalas inicial en las filas, el “tipo” de flecha en las columnas, y “dónde” encontrar el resultado como función de éstos:

	flecha	flecha
e - e	salta	no salta
i - i	salta	no salta
e - i	no salta	salta
i - i	no salta	salta

Esto nos lleva a la regla de que cuando ambos números a multiplicar pertenezcan a las mitades externas o a las internas, entonces la flecha indica que el resultado lo hallaremos “saltando” a la escala exterior, y la flecha “tachada” nos indicará el resultado en la escala interior (“no salta”). Y será al contrario cuando la pareja de números a multiplicar pertenezcan a una combinación de mitades externa e interna, (e x i) o (i x e).

Partiendo de una aproximación diferente, en vez de considerar las mitades de las escalas en cuanto a su proximidad a la línea de contacto cuerpo-reglilla, podemos considerar el orden de éstas, es decir, la primera y la segunda mitad, o “a” y “b” respectivamente. De este modo, las mismas multiplicaciones serían:



Ahora, además, cambiaremos el concepto “saltar”, para considerar si el resultado está “cerca” de la línea de contacto cuerpo-regla o no (en este sentido, podría interesarnos buscar siempre resultados “cerca” para hacer su lectura más sencilla). Esto nos lleva a la siguiente tabla:



	flecha	flecha
A - b	lejos	cerca
B - a	lejos	cerca
A - a	cerca	lejos
B - b	cerca	lejos

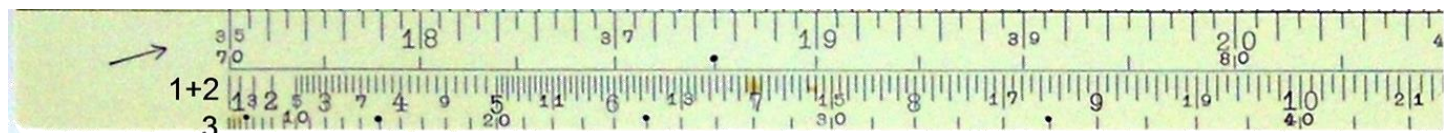
Con esta línea conceptual, la flecha indicará el resultado en la media escala más cercana cuando la multiplicación sea de dos números que pertenezcan a la misma media escala, (según orden). A su vez, la flecha “tachada” nos dará la solución en la media escala cercana cuando la multiplicación corresponda a números de medias escalas distintas (según orden).

(Nota: esta segunda línea de razonamiento viene de un documento recibido con posterioridad, pero la incluyo aquí por sencillez explicativa).

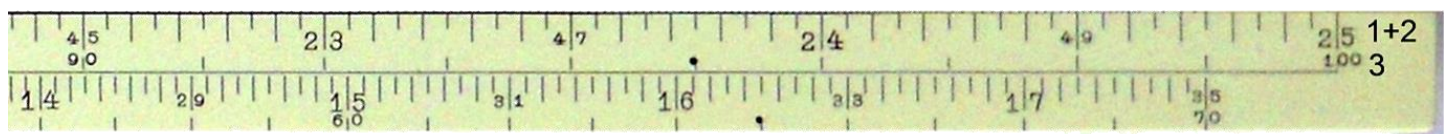
¡Eureka! Hemos encontrado un uso a las flechas. ¡Enhorabuena por la primera tarea conseguida! Entonces, con este buen estado de ánimo ahora podemos ocuparnos de un reto mayor: las escalas especiales.

### 6.- ESCALAS ESPECIALES: CONFIGURACIÓN

Como hemos dicho, hay dos líneas de base y tres series de números. En la primera línea de base hay dos series de números (grandes y pequeños), en posiciones alternas, mientras que la tercera serie está en la segunda línea de base. Las tres series comienzan en cero y tienen una progresión equivalente. En los tres casos las escalas están cortadas en su mitad.



(Parte inferior izquierda)

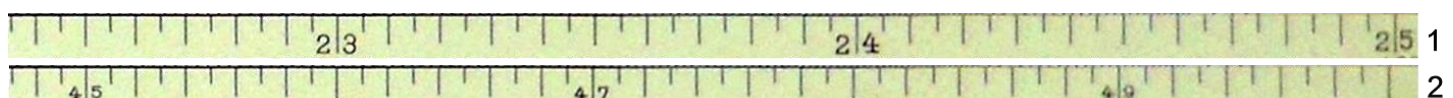


(Parte inferior derecha)

Para simplificar la explicación, procesemos la imagen de las series 1 y 2, aquí mostradas en el inicio de su primera mitad:



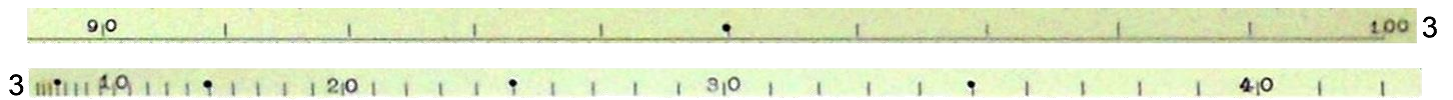
Y en el final de su segunda mitad:



Ahora que vemos las series claramente, comprobamos que la segunda dobla a la primera, o sea, que donde la primera (dígitos grandes) tiene el veinticuatro, allí debería estar el cuarenta y ocho de la segunda, (dígitos pequeños). De este modo, lo que es media división en la serie 1 (como entre 24,00 y 24,05) es una división entera en la serie 2 (de 48,0 a 48,1).



En cuanto a la serie 3 en la segunda línea de base, estos son su inicio y su final:

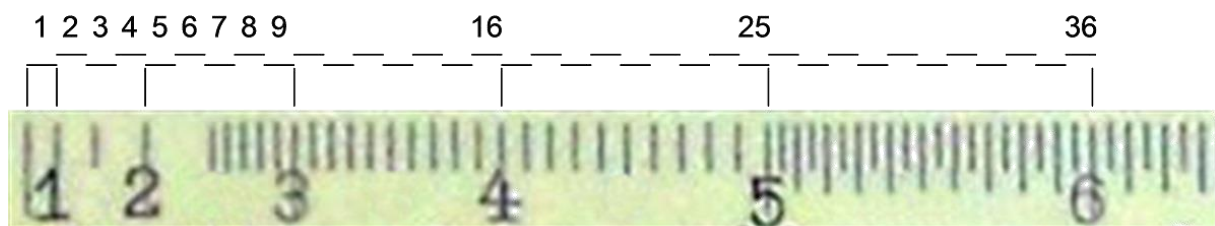


Podemos ver que en ésta cada número es cuatro veces un número de la serie 1 y dos veces uno de la serie 2. Además, si volvemos a las imágenes con las escalas combinadas veremos que a partir del cinco de la serie 1 cada cinco divisiones en la primera línea de base hay una división en la segunda. De este modo, por ejemplo, de 30 a 31 de la serie 3 encontramos en la serie 1 las marcas de 7,50 (en 30) 7,55 7,60 7,65 7,70 y 7,75 (en 31). Así, al colocar el cursor coincidiendo con las marcas de la serie 1 (o de la primera línea de base) podemos localizar 30,2 30,4 30,6 y 30,8 de esta serie 3 (o de la segunda línea de base).

### 7.- ESCALAS ESPECIALES: ESTRUCTURA Y USO

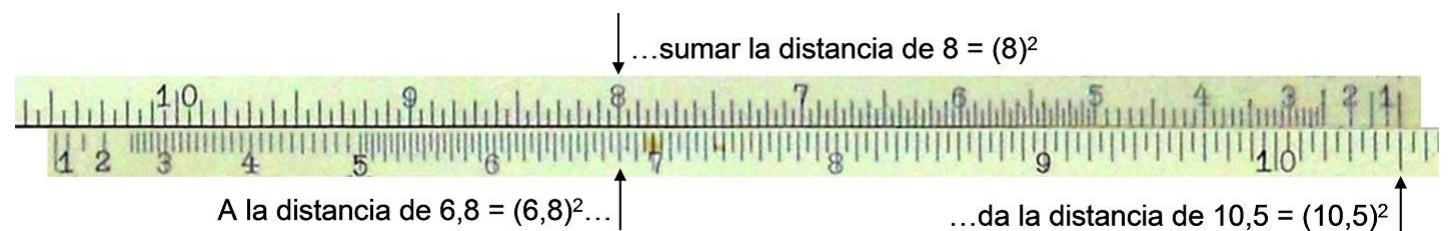
Una vez comprendida la configuración de las series, ¿Cómo las usamos? Para comprender su estructura lo primero que podemos hacer es medir la distancia a que está cada número, para a partir de ahí intentar deducir la relación entre distancia y número, es decir, la fórmula con que se generaron las escalas. Para esto nos sería muy útil una hoja de cálculo en un PC (es lo que usé en primer lugar), pero veámoslo con un método gráfico, que resultará más sencillo.

Como las series empiezan en cero, la distancia entre el cero y el uno es, en realidad, la distancia “unidad” en la estructura de la escala. Así, podemos ver cuántas “unidades” miden las distancias al dos, el tres, etcétera:

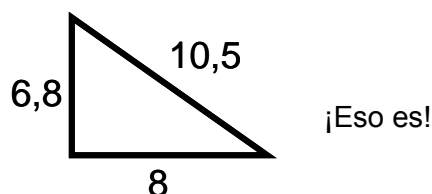


De esta imagen podemos entender rápidamente que la estructura de las escalas es tal que la distancia a un número equivale al cuadrado de éste:  $d = x^2$

Una vez sabemos que en estas escalas trabajamos con cuadrados de números, podemos estudiar qué obtenemos de operar con éstas. Dada la similitud de disposición con las escalas logarítmicas (la reglilla invertida respecto al cuerpo), podemos hacer la hipótesis de que el método de operar será similar al de las escalas logarítmicas. Continuando con las imágenes procesadas:



¿Qué tenemos?  $6,8^2 + 8^2 = 10,5^2$  ¡Esta es una relación Pitagórica!

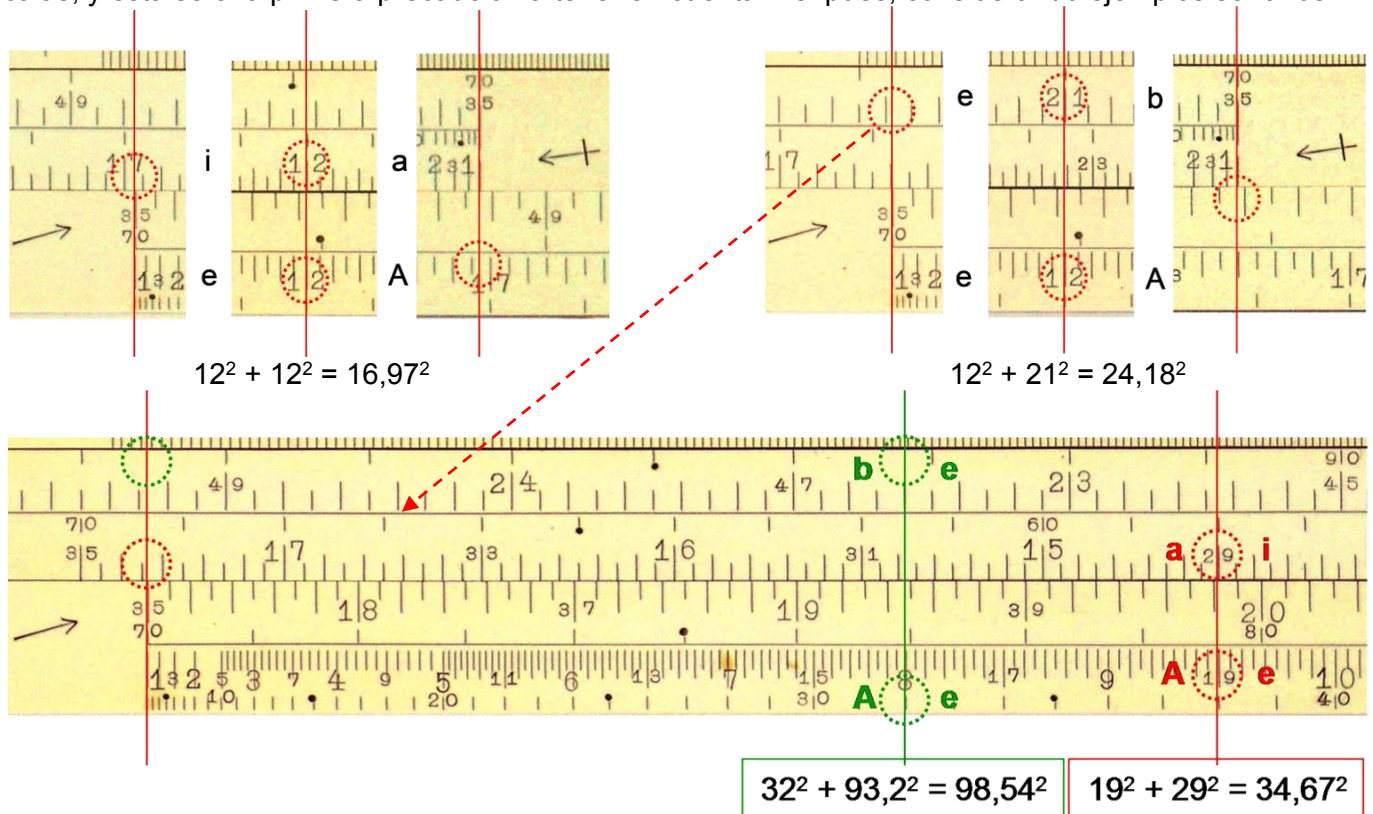




¡Estupendo! ¡Haber sido capaz de encontrar esta clave por mi mismo! Reconozco que no era muy complicado, pero aún así ¡es un buen éxito!

### 8.- ESCALAS ESPECIALES: CÁLCULOS

Ahora que sabemos cómo operar, toca verificar que las flechas tienen el mismo uso y para todas las escalas (series de números). Para empezar, resulta obvio descartar la posibilidad de calcular con números de diferentes escalas, y ésta será la primera precaución a tener en cuenta. Así pues, considerando ejemplos sencillos:



Los dos primeros ejemplos son operaciones con la primera escala (serie de números), mientras que en la tercera imagen se combinan un ejemplo con números de la segunda serie (en rojo) y otro ejemplo con números de la tercera serie (en verde). La flecha discontinua roja nos ayuda a verificar la solución del segundo ejemplo (24,18).

Estos ejemplos nos confirman el uso de las flechas (he añadido las letras al igual que en los ejemplos de multiplicación para facilitar esto), pero podemos ver que es fácil confundirse al buscar el número correcto (en la serie correcta). Podemos imaginar que con la experiencia los cálculos se harían más sencillos, pero al empezar habría que pensar con cuidado...

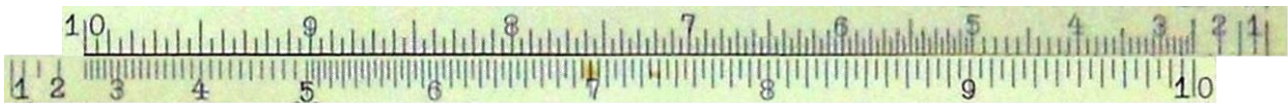
### 9.- ESCALAS ESPECIALES: CÁLCULOS ERRÓNEOS

Estas escalas especiales, cuadráticas, no son "repetitivas" como las logarítmicas, así que no podemos trasladar la reglilla del 1 al 10 o viceversa, y, por tanto, puede haber cálculos que sobrepasen la longitud de las mismas. Imagino que esta debe ser una razón para poner tres escalas cuadráticas a la vez: mantener el compromiso entre resolución y márgenes de operación. Pero lo peor es que podemos no darnos cuenta de este desbordamiento si no vamos con cuidado.

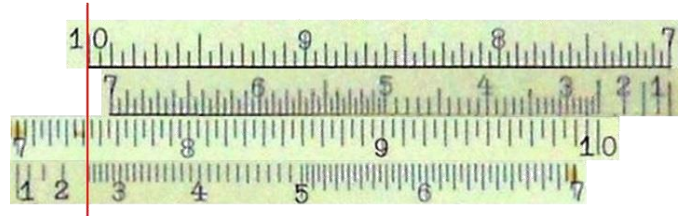
En aras de la sencillez, en los ejemplos a continuación he usado un "corte" del 1 al 10 de la primera escala y lo usaré tal cual y "doblado" por la mitad como estaría en la regla. Así, la operación  $2,5^2 + 10^2 = 10,31^2$ , quedaría



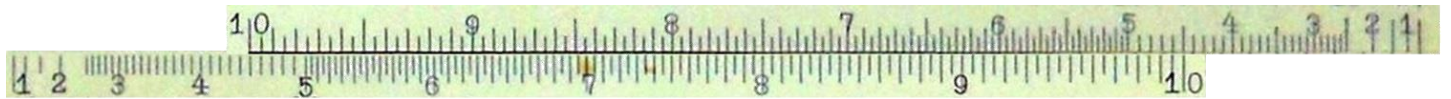
claramente fuera de la escala "completa":



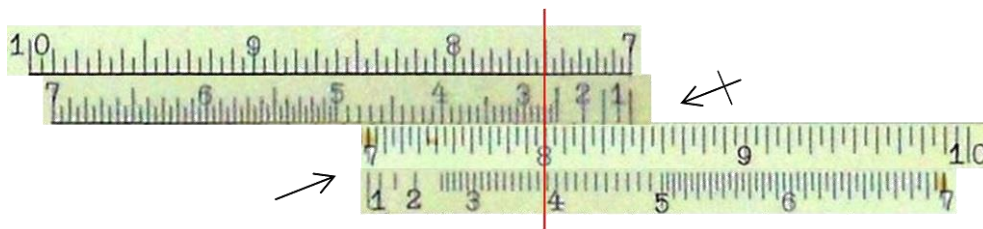
Y también de la escala "doblada":



Pero si probamos a calcular  $7,5^2 + 8^2 = 10,97^2$ , que también queda claramente fuera en la escala "completa":



Vemos que con el par "doblado" el resultado es diferente:



La regla da el resultado de  $4,73^2$  que es claramente erróneo. La pista está en que la solución encontrada es menor que los dos números iniciales, un absurdo, (en realidad, si nos fijamos, es la solución de  $3,88^2 + 2,7^2$ ). De nuevo, hay que tener cuidado al verificar el resultado, especialmente en operaciones encadenadas (cuando estamos acostumbrados a obviar valores intermedios). Por otro lado, sabiendo que  $10^2 = 7,07^2 + 7,07^2$ , podemos entender, en este ejemplo, que la mayoría de operaciones con números en las segundas mitades de las escalas (B y b) darán fuera de rango, lo cual es extrapolable a las escalas de la regla.

¡Bien! Ahora ya sabemos calcular con estas escalas cuadráticas, sabemos usar las flechas, y también, (como no), sabemos trabajar con las logarítmicas y las escalas para mapas de los laterales.

Pero una mirada al reverso de la regla nos muestra un montón de fórmulas y tablas desconocidas. Y lo que es más, al final en esta regla hay muy pocas opciones de cálculo: sólo multiplicaciones y proporciones pitagóricas. ¿Por qué son éstas tan importantes para un ingeniero como para comercializar una regla? En el reverso encontramos la indicación "para topógrafos ferroviarios" pero, ¿cómo usaría este ingeniero esta regla?

Y hasta aquí llegan mis respuestas. Tendría que preguntar a alguien pero, ¿a quién? ¡A colegas expertos! ¡Naturalmente! Así que envié e-mails a un par y éstos a su vez a otros más. Al final ¡obtuve respuestas muy interesantes!

## 10.- ¡LOS COLEGAS ME AYUDAN!

Las primeras indicaciones me llegaron casi en seguida de Günter Kugel [1]:

- "R.R." hace referencia a "Robert Reiss", la fábrica Reiss de principios de siglo XX. Wichmann adquirió esta empresa en 1928.



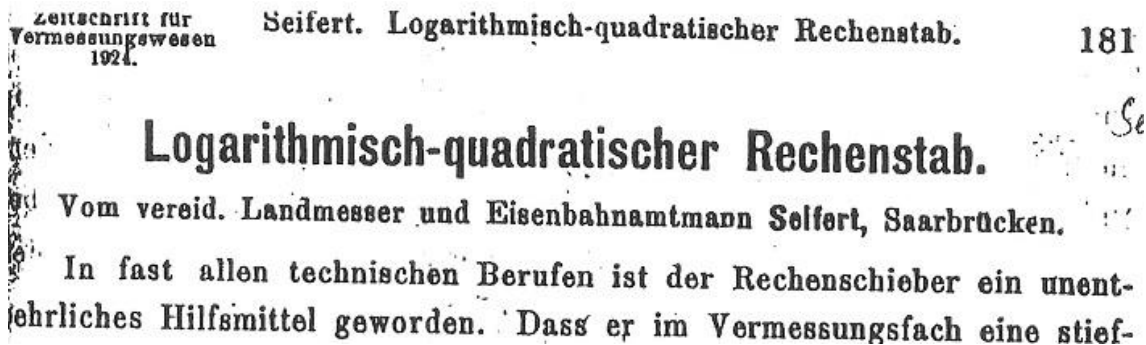
- Esta es la regla de cálculo Py-Lo de Wichmann, modelo 1145. Py-Lo significa "pitagórica-logarítmica".

¡Vaya! ¡Y yo pensando que tenía un ejemplar desconocido! Esta información también aporta luz a otro detalle: la fecha de fabricación.



significará ¡1930!

Pero la ayuda fue más allá, y recibí también de Günter dos artículos en Alemán describiendo la regla. El primero, de 1924, apareció en la revista "Zeitschrift für Vermessungswesen" (Anuario de Topografía) del 15 de Mayo.

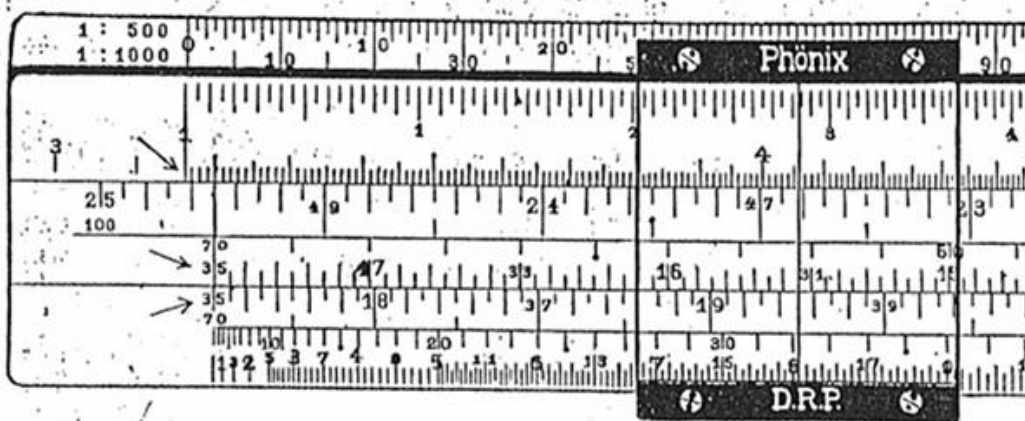


Este artículo presenta una regla de cálculo con escalas logarítmica y pitagórica equivalentes, aunque incluye además una escala para senos en la reglilla.

El segundo artículo, de febrero de 1925, ya hace referencia a la regla "Py-Lo" y las imágenes incluidas muestran un ejemplar casi igual al que estoy estudiando. De hecho el título indica que es un manual de uso que muy bien podría ser de Reiss (y las pequeñas diferencias serían de pasar a ser fabricada por Wichmann).

# Gebrauchsanweisung für den Rechenschieber „Py=Lo“

veröffentlicht in der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ vom 15. Mai 1924 und in den „Allgemeinen Vermessungsnachrichten“ vom 1. August 1924.



En la imagen mostrada se aprecia el cursor original, modelo Phönix (patente D.R.P.364364), que nos faltaba en nuestro ejemplar, y que es muy similar al sustituto de D&P.



Lo primero que podemos leer en este artículo es:

*"Der vorliegende Rechenschieber ist nach den Angaben des vereid. Landmessers und Eisenbahnamtmanns **Herrn Seifert** in Saarbrücken angefertigt."*

O, más o menos traducido:

*"Esta regla está hecha siguiendo las especificaciones definidas por el topógrafo oficial ferroviario **Sr Seifert** de Saarbrücken."*

Queda así claro quién la diseñó, el Sr. Seifert, y su profesión. Y también que su objetivo fue facilitar las actividades que él desarrollaba en su día a día, lo cual refleja al indicar el objetivo de este segundo artículo:

Demostrar la utilidad del instrumento, sus beneficios resumidos en:

- 1) **Manejabilidad** igual a las otras reglas de 25 cm,
- 2) **Precisión** suficiente para la práctica geodésica,
- 3) **Velocidad y fiabilidad** de los cálculos,
- 4) **Versatilidad**, en especial gracias a las tablas y fórmulas en su reverso, y a las ocho escalas para mapas.
- 5) Los dos sistemas de escalas comparten unas **reglas de cálculo comunes**.

Podría ser interesante saber por qué la escala de senos desapareció entre el artículo de 1924 y este de principios de 1925. Quizá esto se debió a que su precisión no era suficiente, o porque con sólo una escala de senos no era suficiente para los cálculos trigonométricos (quizá al menos hacía falta otra de tangentes...).

## 11.- CÁLCULOS POSIBLES CON LAS ESCALAS PY

Al leer este segundo artículo nos describe las operaciones que se pueden hacer con las escalas PY, siempre en comparación con la escala logarítmica, equiparando suma a multiplicación y resta a división. Las operaciones básicas son, por tanto:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{a^2 - b^2}$$

También podemos combinar ambas, empezando por la resta (de nuevo como en las logarítmicas):

$$\sqrt{a^2 - c^2 + b^2}$$

Por supuesto, también pueden hacerse operaciones encadenadas de un solo tipo:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$$

Y hay maneras indirectas de realizar algunos cálculos específicos:

$$a = b \cdot \sqrt{2} = \sqrt{b^2 + b^2}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Encontramos también una indicación de cuándo hay que usar una escala Py (serie de números) u otra, a partir del par de números con que iniciaremos el cálculo (entre 0 y 250):



Escalas	El número mayor entre	
0 - 25	10 - 25	100 - 250
0 - 50	25 - 50	0 - 5
0 - 100	50 - 100	5 - 10

No queda claro por qué la tabla acaba en 250 (parece obvio, por ejemplo, asignar los tramos 250 - 500 y 500 - 1000 a las escalas segunda y tercera), aunque quizá la resolución a partir de ahí ya no fuera suficiente.

Tampoco hay ninguna pista para saber de antemano si el resultado quedará fuera de rango (sólo una indicación para tener cuidado al respecto), a parte de indicar que operar con dos números en las segundas mitades lo hará (afirmación que he avanzado con la justificación en el capítulo 9). Pero hay un curioso ejemplo donde un resultado intermedio sería una raíz cuadrada negativa...

En la descripción de la precisión de la regla el autor llega a dar valores estadísticos, cuya traducción aproximada sería:

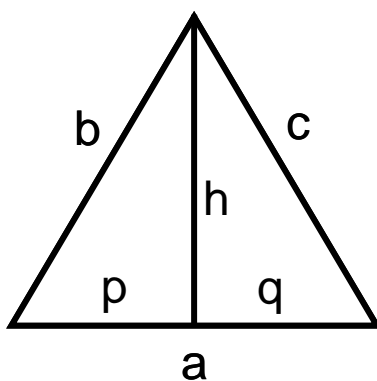
A partir de ensayos de cálculo el error del promedio de la estimación lineal en la lectura es de 0,063 mm. Lo cual indica que:

- para las escalas "Lo" el error promedio de un calculo con dos operandos es de  $\pm 0,4 \%$  de la lectura,
- para las escalas "Py" está entre  $\pm 0,5 \%$  (en 10,0 que es el punto más desfavorable en la escala 0 - 25) y  $\pm 0,1 \%$ ,
- para hipotenusas entre 100,0 y 125,0 la precisión puede mejorarse doblando el valor de los catetos, y leyendo entonces el resultado en el rango de 200 a 250 (escala 0 - 25), que será a su vez dividido a la mitad. El error promedio queda, así, entre  $\pm 0,15 \%$  y  $\pm 0,10 \%$ .

## 12.- ¿"FÜR EISENBAHNLANDMESSER"?

A parte de explicar el uso y las operaciones básicas con la regla, también hay ejemplos de operaciones del día a día del topógrafo en las que se aprovecha el uso combinado de ambos tipos de escala:

Al calcular triángulos nos hacen falta las fórmulas:



$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \text{ donde } m = \sqrt{a^2 - c^2 + b^2} \text{ se calcula con las escalas PY,}$$

$$\text{y } p = \frac{m}{2a} \cdot m \text{ se calcula con las escalas LO.}$$

$$q = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \text{ donde } n = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \text{ se calcula con las escalas PY,}$$

$$\text{y } q = \frac{n}{2a} \cdot n \text{ se calcula con las escalas LO.}$$

Naturalmente,  $h = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{c^2 - q^2}$  se calcula solo con las escalas PY. Las fórmulas de p y q se pueden deducir fácilmente de las de h combinándolas con la relación  $a = p + q$ .

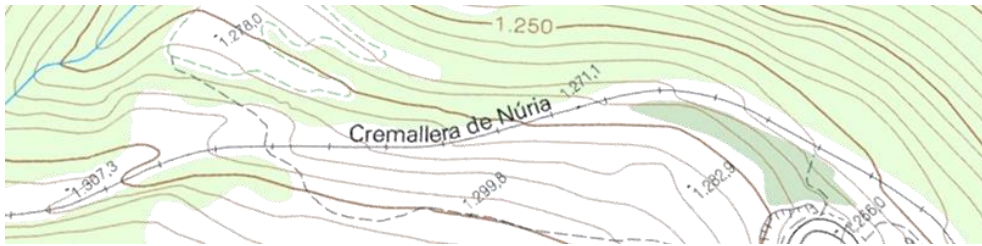
Otro uso son los cálculos en coordenadas cartesianas, donde la distancia d entre el punto  $(x_1, y_1)$  y el punto  $(x_2, y_2)$ , viene dada por:  $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$  que se puede calcular con las escalas PY, y donde el seno y el coseno se pueden calcular en las escalas LO a partir de las ecuaciones:  $\sin = \frac{y_2 - y_1}{d}$  y  $\cos = \frac{x_2 - x_1}{d}$ .



Finalmente hay una referencia al cálculo de errores promedio con la fórmula  $\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-v}}$  donde  $w = \sqrt{\sum v^2}$

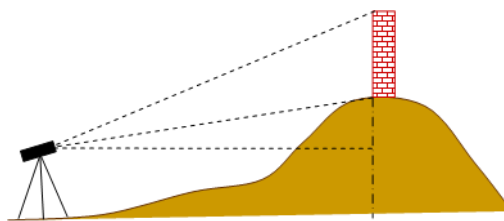
se calcula con las escalas PY, y  $\mu = \frac{W}{\sqrt{n-v}}$  con las escalas LO. No tengo idea de dónde se obtiene esta fórmula (y su nomenclatura). Pero se puede asumir que "v" serán los valores de los errores y "n" y "v" los números de las muestras tomadas al promediar (aunque no tengo clara la razón de restarlos).

No se menciona nada más específico del trabajo de un topógrafo y, por tanto, no tenemos casos concretos de trabajo usando las escalas PY. De todos modos, poniendo un poco de imaginación, si tuviéramos que calcular la longitud real de los raíles necesarios para una distancia leída en un mapa, sería necesaria una conversión de catetos (longitud medida en el mapa y diferencia de cota leída) a su hipotenusa.

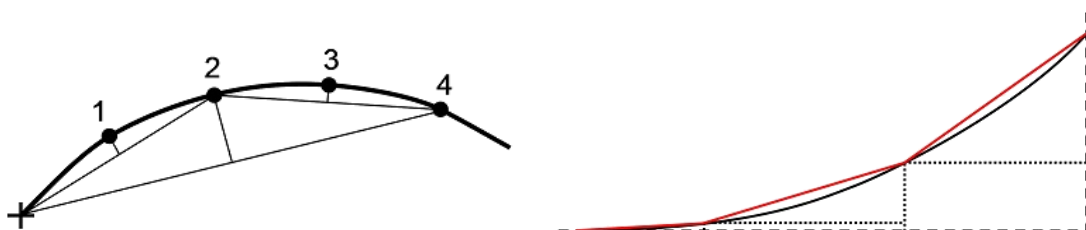


Por ejemplo en el mapa de la imagen previa (cuando está en la escala correcta), la longitud de la vía dibujada entre la cota de 1.250 m y la de 1.300 m es de 342 m, y esto significa (la diferencia de altura es 50 m), que la longitud real es 345,6 m.

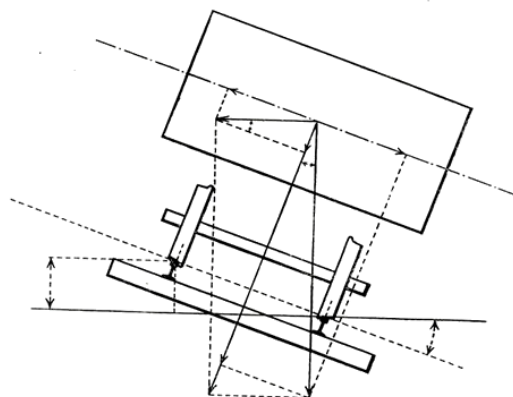
Otros ejemplos posibles podrían venir de actividades como las representadas en las imágenes siguientes:



Medida de alturas



Trazado de recorridos





### 13.- COMPRIENDIENDO LAS TABLAS DE LA REGLA DE CÁLCULO

Hasta ahora hemos tratado de información recibida y externa a la regla en sí. Pero aún hay un gran misterio en relación con el significado de las tablas y fórmulas en su reverso. Y no perdamos de vista que el diseñador afirmó que una de las ventajas de la regla era esta información adjunta a la regla. Así pues, en paralelo, otros colegas me habían estado ayudando a descifrar estos datos.

Ya hemos visto una imagen general del reverso de la regla en el capítulo 4. Así, veámoslo ahora por partes, de izquierda a derecha. Por desgracia, no ha sido posible desentrañar (demostrar) el significado o uso de todo lo incluido en este grupo de tablas y fórmulas. Por tanto, en esos casos donde las indicaciones son sólo hipótesis cambiaré el color del texto a rojo.

Aparte de hacerlas así más fáciles de detectar, al resaltarlas invito al lector a aportarme los detalles oportunos (demostraciones matemáticas). No sólo va mi agradecimiento por adelantado, sino que incluiré su explicación como una modificación de este escrito (y, si tengo permiso, su cita).

#### 13.1.- Primera Parte

Esta primera parte es una tabla de números para "límites de error" [5]:

S	m	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	C	2	3	4	5	6	7	8	9	M	2	3
I	cm	4	6	9	11	13	14	16	17	19	20	21	32	41	49	57	65	72	80	87	95	167	239
II	"	5	8	11	14	16	18	20	21	23	24	26	39	50	60	70	79	89	98	107	116	205	292
III	"	6	9	13	16	18	20	23	25	26	28	30	45	57	69	81	92	102	113	124	134	237	337

En una primera inspección vemos una fila superior de números (en metros) respecto a la cual parecen asociarse los números de las otras tres filas. Las filas dos a cuatro, marcadas I, II y III van en cm y las tres se relacionan con la primera aproximadamente según la función  $y = c \cdot x^b$ , ("y" son los números de las filas dos a cuatro, y "x" corresponde a la primera fila), siendo c y b constantes. b es 0,62 para las tres filas, mientras que c es 1,32 para la fila I, 1,62 para la II y 1,9 para la III. Estos valores se obtuvieron colocando la tabla en una hoja de cálculo y presentando los datos en una gráfica con ambos ejes logarítmicos. Con esto se obtuvieron tres líneas casi rectas. A éstas se les asoció, entonces, sus líneas de tendencia, de las que se encontraron las respectivas fórmulas.

**Aún y así, solo podemos apuntar que estas pueden ser tres listas de errores máximos en alguna operación longitudinal, o de alguna desviación (en %).** No ha sido posible relacionar la tabla con las escalas PY, que son tres (series de números) al igual que las listas de la tabla. Por ejemplo, la primera línea de la tabla recoge números de 5 a 3000, mientras que, como hemos visto, el autor limita el uso de las escalas PY entre 0 y 250, y en tramos saltados. Otro detalle a considerar es que los números en las filas inferiores crecen al crecer los números de la fila primera. Así si fueran errores de cálculo estarían en contradicción con el hecho de que la distancia entre números en las escalas PY crece con sus números y por tanto, disminuiría el error en su lectura. **La hipótesis sería que se trata de la tabla de compensación de las lecturas realizadas con un instrumento topográfico común en la época (pero carezco de datos que lo corroboren).**

#### 13.2.- Segunda Parte

La segunda parte incluye una serie de fórmulas separadas horizontalmente en dos grupos:



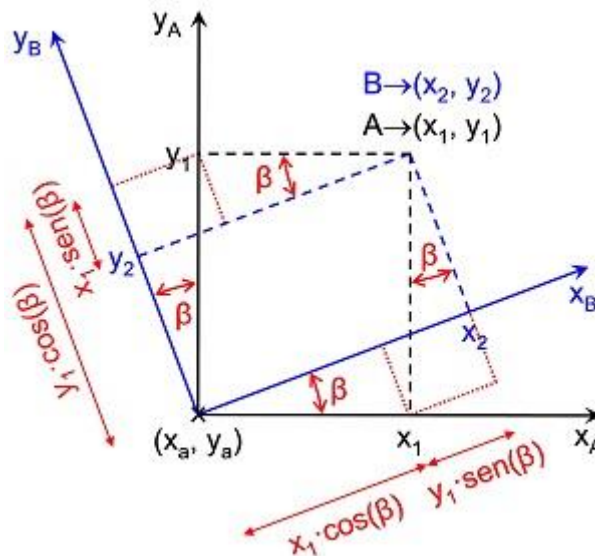
$x = (y - y_a) \cdot \sigma + (x - x_a) \cdot a$	$\sigma = \frac{y_c - y_a}{s}$	$a = \frac{x_c - x_a}{s}$
$y = (y - y_a) \cdot a - (x - x_a) \cdot \sigma$	$s = \sqrt{(y_c - y_a)^2 + (x_c - x_a)^2}$	
$x = \frac{m \cdot x_3 - n \cdot x_4 - y_3 + y_4}{m - n}$	$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	
$y = m(x - x_3) + y_3 = n(x - x_4) + y_4$	$n = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}$	

El grupo superior hace referencia al cambio de ejes de coordenadas (Cartesianos). Ya hemos presentado alguna de estas fórmulas, (las del seno, el coseno y la distancia en el capítulo 12) pero veamos su uso aquí.

Para facilitar las explicaciones, analicemos primero solo el cambio de coordenadas cuando los ejes se desplazan a una coordenada  $(x_a, y_a)$ . Se puede ver, sin mayor dificultad, que un punto de coordenadas  $(x_2, y_2)$  según el eje desplazado "B" se podrá obtener a partir de las coordenadas obtenidas en el primer eje "A",  $(x_1, y_1)$ , según los valores:

$$x_2 = (x_1 - x_a) \quad y_2 = (y_1 - y_a)$$

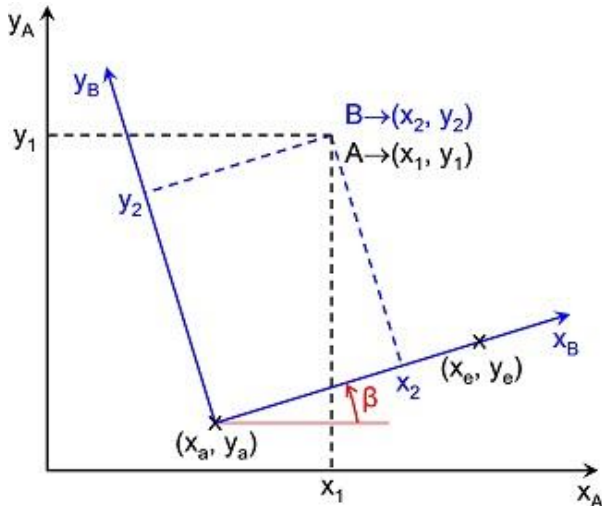
Esto ya nos da una parte de las fórmulas. Para el resto, consideremos ahora que los dos ejes, "A" y "B", solo se diferencian por un giro de un ángulo  $\beta$ .



De la figura podemos ver que:

$$x_2 = x_1 \cdot \cos(\beta) + y_1 \cdot \sin(\beta) \quad y_2 = y_1 \cdot \cos(\beta) - x_1 \cdot \sin(\beta)$$

Ahora, para la combinación final, consideremos el caso completo (genérico) de cambio de coordenadas, donde a un desplazamiento inicial a  $(x_a, y_a)$  le añadimos el giro de un ángulo  $\beta$ .



Combinando las fórmulas, entonces, podemos tener:

$$x_2 = (y_1 - y_a) \cdot \sigma + (x_1 - x_a) \cdot a$$

$$y_2 = (y_1 - y_a) \cdot a - (x_1 - x_a) \cdot \sigma$$

Donde "σ" es sen(β) y "a" es cos(β). Sin embargo, como no conocemos el ángulo, nos aprovechamos de un segundo punto (x<sub>e</sub>, y<sub>e</sub>) en el eje X<sub>B</sub> (visto desde el eje "A") para obtener dicho seno y coseno, usando las otras tres fórmulas mostradas en este primer grupo de la tabla:

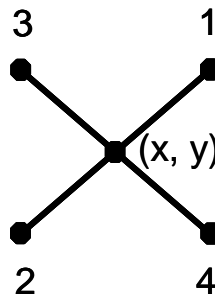
$$\sigma = \frac{y_e - y_a}{s} \text{ es el seno, } a = \frac{x_e - x_a}{s} \text{ es el coseno,}$$

$$s = \sqrt{(y_e - y_a)^2 + (x_e - x_a)^2} \text{ es la distancia entre}$$

ambos puntos.

En la explicación previa se han añadido algunos índices respecto a lo mostrado en la tabla de la regla, para así facilitar la comprensión de lo presentado.

En el mismo escenario, las fórmulas del grupo inferior hacen referencia al cruce de dos líneas tal como se ve en la figura:



Entonces,  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  es la pendiente de la línea definida por los puntos 1 y 2, y  $n = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}$  es la pendiente de la otra línea, definida por 3 y 4. De este modo, las fórmulas para las líneas son:

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = m \quad \frac{y - y_4}{x - x_4} = n$$

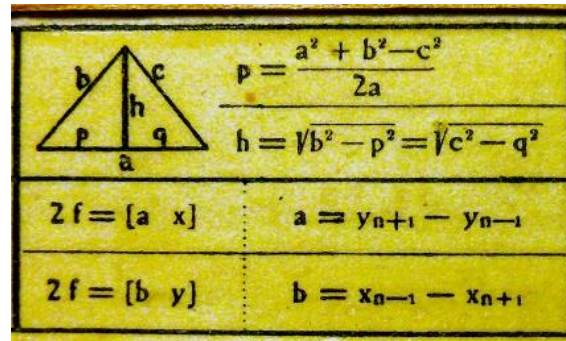
Si ahora queremos encontrar las coordenadas del punto donde ambas líneas se cruzan, debemos considerar las dos fórmulas como un sistema de dos ecuaciones y entonces llegamos a:

$$x = \frac{m \cdot x_2 - n \cdot x_4 - y_2 + y_4}{m - n} \quad y = m \cdot (x - x_2) + y_2 = n \cdot (x - x_4) + y_4$$

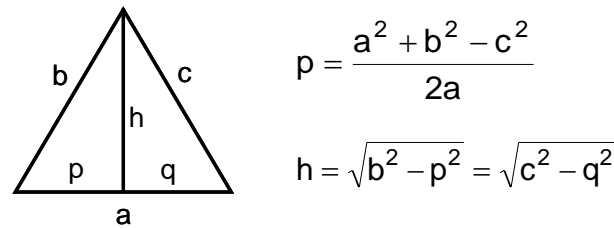
Que son las otras dos fórmulas mostradas en la tabla.

### 13.3.- Tercera Parte

La tercera parte la forma otro grupo de fórmulas, de nuevo dividido por la mitad:



La parte superior de este grupo ya la hemos discutido anteriormente, así que solo incluiré las fórmulas:



En cuanto a las fórmulas de la parte inferior:

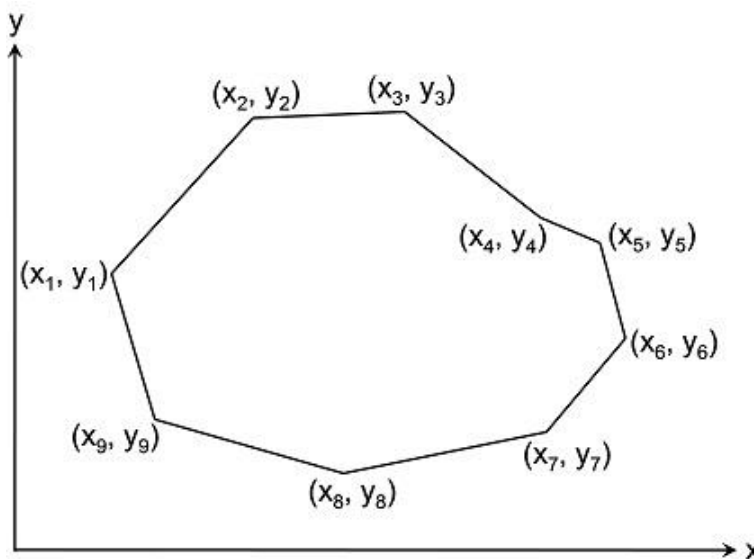
$$2f = [a \ x] \quad a = y_{n+1} - y_{n-1}$$

$$2f = [b \ y] \quad b = x_{n-1} - x_{n+1}$$

Aunque la notación hoy en día es un poco confusa, su objeto es encontrar el área "f" de una superficie dada por una serie de puntos consecutivos (en coordenadas cartesianas). De hecho si las escribimos de un modo más específico, las fórmulas, definidas por Gauss, son:

$$2 \cdot f = \sum_{n=1}^m (y_{n+1} - y_{n-1}) \cdot x_n \quad 2 \cdot f = \sum_{n=1}^m (x_{n-1} - x_{n+1}) \cdot y_n$$

Para una superficie definida por "m" puntos consecutivos (para n = m+1 volvemos a n = 1).



Ambas fórmulas dan el mismo resultado y, así, una puede usarse para confirmar el resultado de la otra. Hay otra manera de escribir las fórmulas, ordenando las variables de un modo diferente, pero que he encontrado más comúnmente descrita en la literatura (Internet):

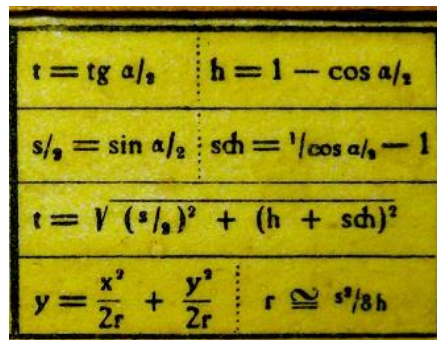


$$f = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^m (x_n \cdot y_{n+1} - x_{n+1} \cdot y_n)$$

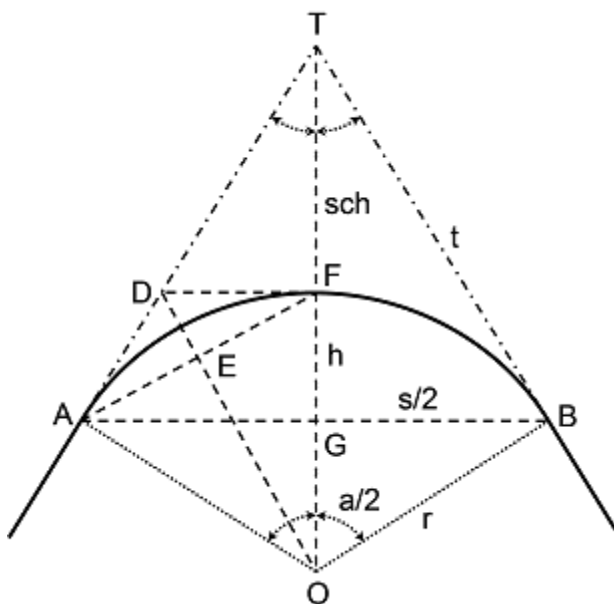
A esta expresión se la conoce también en Inglés como la fórmula "shoelace" ("lazada de zapato"), debido a un método gráfico para obtener todos los productos necesarios.

### 13.4.- Cuarta Parte

Pasando a la siguiente parte en el reverso de la regla, vemos:



Aquí empiezan las fórmulas directamente relacionadas con el trazado de vías férreas. En este grupo tenemos lo necesario para definir la curva entre dos tramos rectos, tangente en los puntos A y B. En general:



$$t = r \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} \quad h = r \cdot \left(1 - \cos \frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{s}{2} = r \cdot \sin \frac{a}{2} \quad sch = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{a}{2}} - 1\right)$$

Estas fórmulas coinciden con las de la regla para  $r = 1$ .

$$t = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (h + sch)^2} \quad r \cong \frac{s^2}{8h}$$

Finalmente,

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r}$$

Es la ecuación de una circunferencia de radio  $r$ . El origen de coordenadas estaría en el punto A, el eje  $x$  coincidiría con la línea AT, y el eje  $y$  incluiría la línea AO, (¡un poco complicado!). Con ésta podríamos trazar los puntos de la curva. Veamos cómo obtener el resto de fórmulas.

En la figura podemos ver que el punto T viene definido por el cruce entre las prolongaciones de las vías rectas a partir de los puntos A y B, de modo que AT y BT son la misma distancia y se denomina  $t$ , uno de los parámetros principales.

Otro parámetro es el ángulo del arco, referenciado al centro en O, que es el punto que une las perpendiculares desde A y B. Así, las distancias OA y OB son el radio  $r$  de dicho arco.



El siguiente es la cuerda del arco,  $s$ , o la distancia entre A y B.

En la línea que conecta T y O encontramos el parámetro  $sch$ , que marca la distancia entre T y el punto central del arco, F. Entonces,  $h$  es la distancia resultante entre F y el cruce con la cuerda, (siendo la mayor distancia entre el arco y su cuerda).

A partir de estas variables y las fórmulas para triángulos rectángulos, podemos llegar a las que están incluidas en el dorso de la regla, (algunas considerando  $r = 1$ , o sea normalizando el radio).

Del triángulo rectángulo definido por OBT, (siendo OT la hipotenusa), podemos deducir  $t = OT \cdot \sin \frac{a}{2}$  que, con  $r = OT \cdot \cos \frac{a}{2} \Rightarrow OT = r \cdot \frac{1}{\cos \frac{a}{2}}$  nos lleva así a  $t = r \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}$ . Igualmente llegaremos a  $\frac{s}{2} = r \cdot \sin \frac{a}{2}$ .

Si ahora miramos a OF tenemos que  $OF = r = h + r \cdot \cos \frac{a}{2}$  y esto nos lleva a  $h = r \cdot \left(1 - \cos \frac{a}{2}\right)$ .

Si volvemos otra vez al triángulo OBT, vemos que  $OT = TF + OF = sch + r$ . Y de aquí,

$$r = OT \cdot \cos \frac{a}{2} = (r + sch) \cdot \cos \frac{a}{2} \Rightarrow r \cdot \left(1 - \cos \frac{a}{2}\right) = sch \cdot \cos \frac{a}{2} \text{ y para acabar } sch = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{a}{2}} - 1\right).$$

La fórmula más compleja (o más larga) es también fácil cuanto aplicas la relación pitagórica al triángulo rectángulo que tiene  $t$  como hipotenusa, y  $s/2$  y  $(sch+h)$  como catetos.

$$t = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (h + sch)^2}$$

Pero para la más pequeña hay que dar una explicación un poco mayor. Para empezar consideramos que los triángulos rectángulos AEO, y FGA (y DAO y DEA) son proporcionales. Entonces  $\frac{AF}{FG} = \frac{OA}{AE}$  o, en otros

términos,  $\frac{AF}{h} = \frac{r}{\frac{1}{2}AF}$ . Ahora aproximamos  $AF \cong AG = \frac{s}{2}$  con lo que  $\frac{s/2}{h} \cong \frac{r}{s/4}$ , y arreglando la ecuación

obtenemos  $r \cong \frac{s^2}{8h}$ .

Finalmente,  $y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r}$  es la fórmula de una circunferencia de radio  $r$  que pasa por el origen de coordenadas y su centro está en el eje  $y$ . (para  $x = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 2r$ ).

### 13.5.- Quinta Parte

La quinta parte se encuentra a continuación de la indicación "für Eisenbahnlandmesser":

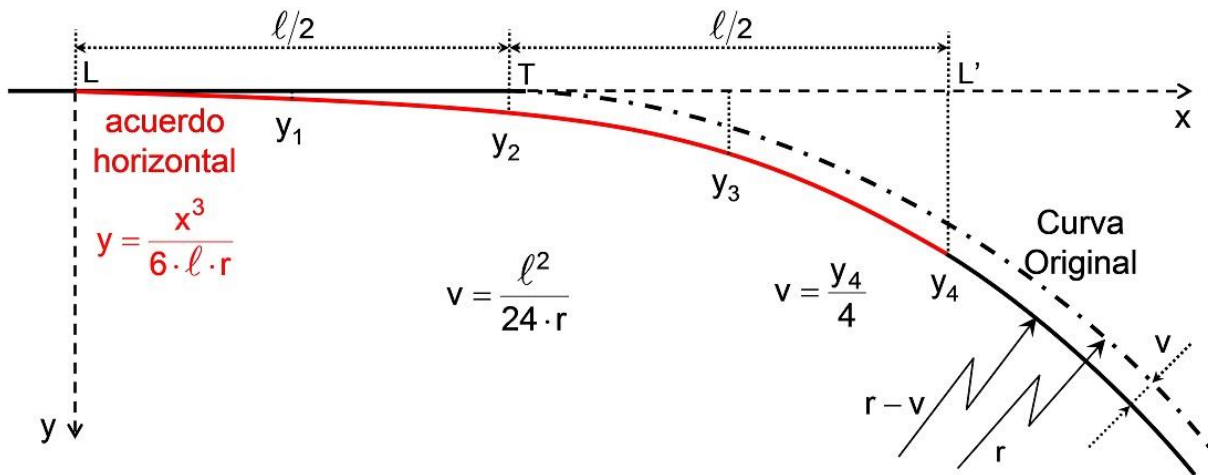


300	1	180	1	$v = \frac{l^2}{24 \cdot r}$	$y_1$	$0,063 \cdot v$
	80		40		$y_2$	$0,500 \cdot v$
500		250			$y_3$	$1,687 \cdot v$
	60		30		$y_4$	$4,000 \cdot v$
1500		400				
	40		20			
3000		2000				

y está relacionado con el acuerdo horizontal, o función de transición que sigue el raíl externo para pasar de estar plano respecto al otro raíl (el interno), durante el recorrido recto previo, a estar peraltado (elevado) durante el recorrido de una curva.

Este es un extracto (traducido) de lo que se puede leer en [4]:

*El propósito del acuerdo horizontal, conectando la tangente y el arco circular, es producir una fuerza centrífuga progresiva que pueda ser compensada por el incremento progresivo de la fuerza centrípeta producida por la elevación gradual del raíl externo del acuerdo horizontal. ... en la práctica, la relación con la que se alcanza la elevación del raíl externo es una función de la velocidad del tren (... con objeto de que no sea notada por un pasajero del tren).*



La fórmula de esta función es  $y = \frac{x^3}{6 \cdot l \cdot r}$  (ver figura). En la figura se a marcado punteada la curva de partida, de radio  $r$  y tangente al raíl horizontal (en el eje  $x$ ) en el punto  $T$ , que debería haber seguido el raíl de la curva. Como el raíl externo está elevado (peraltado) en la curva mientras que la distancia entre raíles debe conservarse (obviamente), éste debe trazar una curva con un radio menor ( $r - v$ ). Como se muestra, el eje  $y$  representa la separación respecto al raíl recto inicial (el eje  $z$  es perpendicular al plano del dibujo).

Entonces, el acuerdo horizontal tiene una longitud " $l$ " en  $x$ , y se eleva progresivamente en  $z$  de 0 a la altura final del peralte respectivo de la curva. Respecto al punto  $T$  comienza a una distancia " $l/2$ " y termina a igual distancia del mismo (¡obvio!). El peralte de una curva está relacionado con la velocidad con que los trenes pueden tomarla y del mismo modo el acuerdo horizontal necesario, siempre intentando maximizar el confort del pasajero.

A partir del dibujo podemos ver también que los puntos de la tabla  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  corresponden a un valor de  $x$  igual a " $1/4 l$ ", " $1/2 l$ ", " $3/4 l$ " y " $l$ ". A su vez, se reconoce (no he encontrado una demostración clara), que  $v$  es igual a un cuarto de  $y_4$  y, por tanto, cuando esta relación se aplica a la fórmula del acuerdo horizontal se



obtiene  $v = \frac{l^2}{24 \cdot r}$ , que es la única fórmula que se ve en esta parte de la tabla de la regla ( $v = l^2 : 24 r$ ).

Finalmente, con algunos cálculos sencillos podemos encontrar los factores referenciados en la tabla entre  $v$  y las ordenadas y indicadas. Veámoslo para  $y_3$ :

$$y_3 = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot l\right)^3}{6 \cdot l \cdot r} = \frac{3^3 \cdot l^2}{24 \cdot r} = \frac{27}{16} \cdot v$$

Lo que nos lleva en la tabla a

$y_1$	$(1/16) \cdot v$	$0,063 \cdot v$
$y_2$	$(1/2) \cdot v$	$0,500 \cdot v$
$y_3$	$(27/16) \cdot v$	$1,687 \cdot v$
$y_4$	$4 \cdot v$	$4,000 \cdot v$

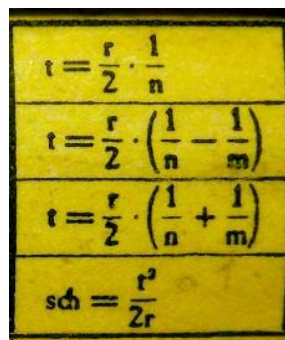
Por otro lado, **la parte izquierda de la tabla todavía sigue siendo un misterio,**

300		180	
	80		40
500		250	
	60		30
1500		400	
	40		20
3000		2000	

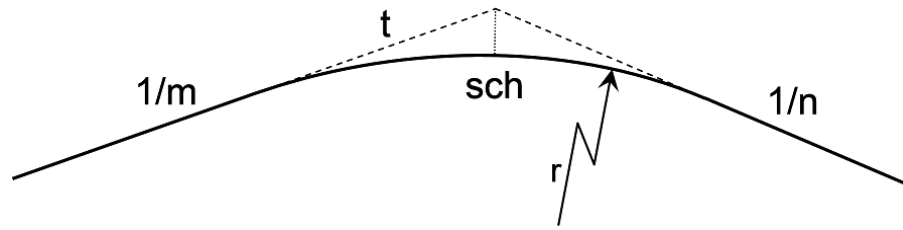
Aunque parece que debe estar relacionada con la parte derecha, puesto que el carácter "l" en la parte superior de las columnas 2 y 4 parece hacer referencia al de  $v = l^2 : 24 r$ . Pero es un misterio cómo relacionar los cuatro valores de las columnas 1 y 3 con los tres valores de las columnas 2 y 4. Por ejemplo, la columna 2 es el doble de la columna 4, pero esto no se cumple entre las columnas 1 y 3. Además, la relación entre los números de las columnas 2 y 4 parece bastante clara, pero no en las columnas 1 y 3. ¡Cualquier pista es bienvenida!

### 13.6.- Sexta Parte

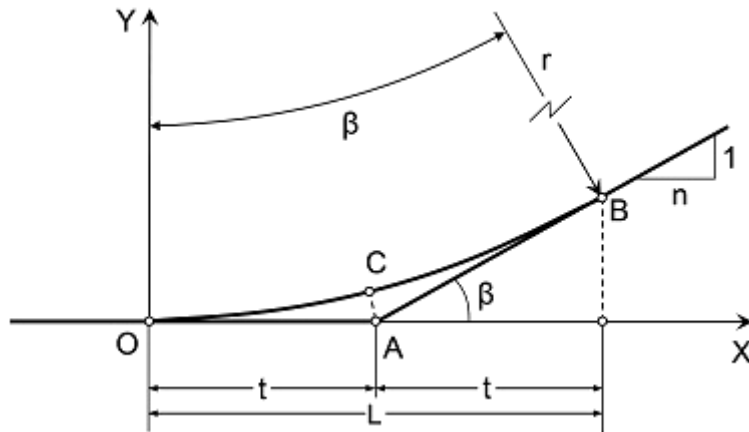
La sexta parte de los datos del reverso de la regla también se refieren a un acuerdo (curva de transición), pero esta vez vertical.



Estas son las fórmulas de la curva de unión entre tramos con diferente pendiente (rasante). En la figura siguiente podemos ver las diferentes variables involucradas:



Para empezar, consideremos el acuerdo vertical entre una vía horizontal y una vía ascendente de pendiente  $1/n$  como en la figura. La curva para esta conexión es una parábola (de nuevo para asegurar el confort de los pasajeros).



De todos modos, como  $n$  es normalmente muy grande ( $\beta$  muy pequeño), la parábola puede aproximarse por una circunferencia. En el mismo sentido:

$$\beta \cong \tan(\beta) = \frac{1}{n}$$

$$L \cong \text{arc} = r \cdot \beta$$

$$t = \frac{L}{2} \cong \frac{r \cdot \beta}{2} \cong \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

A partir de este resultado (la primera fórmula de la lista), en el caso en que la primera vía no es horizontal, sino que tiene una pendiente ascendente de  $1/m$ , podemos reducirlo al caso previo (primera vía horizontal) considerando que la segunda vía tiene una pendiente igual a la diferencia entre ambas pendientes, o lo que es lo mismo.

$$t = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \text{ y, si las pendientes son de signo contrario (como en la primera figura), } t = \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

Por otro lado, como hemos comentado, la función que conecta ambas vías es una parábola que, en nuestro caso, se puede expresar como  $y = a \cdot x^2$  siendo "a" un valor constante.

Como la parábola conecta con la vía ascendente en B, en ese punto ambas pendientes deben coincidir. Para obtener la pendiente de la parábola hallamos su derivada  $y = 2a \cdot x$  y buscamos el valor para  $x$  igual a  $L$ . Igualando esta pendiente a la de la vía ascendente,  $1/n$ , entonces,

$$2 \cdot a \cdot L = \frac{1}{n} = \tan(\beta) \cong \beta \Rightarrow a \cong \frac{\beta}{2 \cdot L} \cong \frac{\beta}{2 \cdot r \cdot \beta} = \frac{1}{2 \cdot r}$$

De este modo llegamos también a la fórmula de la circunferencia de radio  $r$  y con centro en el eje  $y$ , para  $y = r$ .

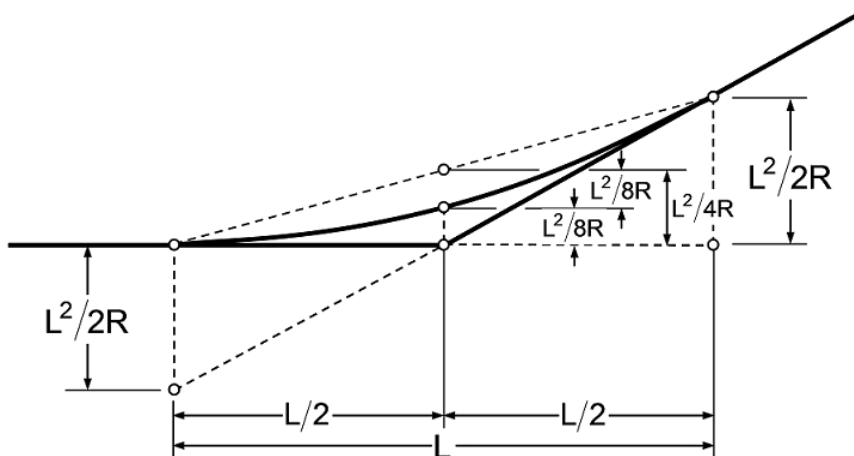
$$y \cong \frac{x^2}{2 \cdot r} \quad (r \text{ es muy grande, y las } y \text{ obtenidas muy pequeñas})$$

También, manteniendo las aproximaciones, podemos considerar "sch" (la distancia AC), como el valor de la circunferencia en  $x = L/2 = t$ , y esto nos lleva a  $\text{sch} = \frac{t^2}{2 \cdot r}$ .

Por último, en el caso en que cambiamos de una vía horizontal a una ascendente, podemos obtener, a partir



de  $y \cong \frac{x^2}{2R}$ :



**13.7.- Séptima Parte**

Siguiendo las indicaciones de [5], hemos considerado que esta última parte está relacionada con los desvíos ferroviarios (ramales).

	7	9	10	14
d	7,071	9,055	10,050	14,036
a	8° 07' 48"	6° 20' 25"	5° 42' 38"	4° 05' 00"
r	140	190	245	500

El hecho es que hay distintos tipos de desvío y, entonces, hay distintas fórmulas para definirlos. Hay una relación clara entre l, d, y a, que viene dada en un triángulo rectángulo, y que puede relacionarse con el desvío:

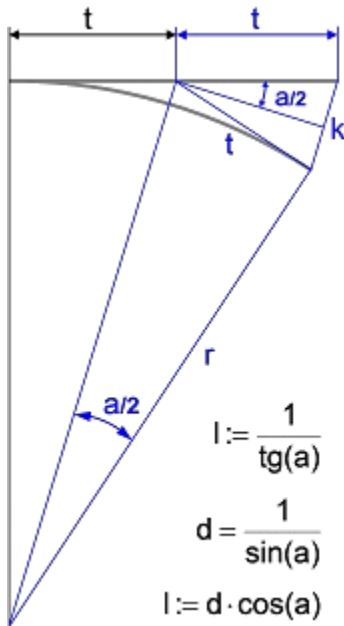
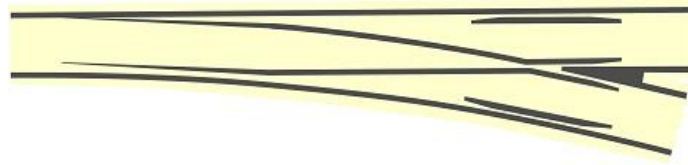


Así, aplicando esta relación al desvío, el ángulo "a" marcará la desviación entre ambas vías. Desde otra aproximación, la inversa de la tangente de este ángulo da "nombre" al desvío, dando un número entero, que se muestra en la primera fila de la tabla como "l:". A partir de ahí, en la segunda fila tenemos la inversa del seno, denominada "d".

El "número" del desvío se escoge de acuerdo con la velocidad media de los trenes en esa vía ferroviaria. Cuanto mayor es el número "l:" más rápidos son los trenes. De hecho la velocidad media prevista de los trenes circulando por un tramo dado define el radio mínimo de las curvas, y así mismo el de los desvíos (aunque estos no sean peraltados).

Por último, la última fila, identificada como "r", **daría el radio de giro de la vía que se desvía.**

Consideramos ahora un desvío básico actual, donde la vía secundaria se desvía siguiendo un arco hasta que la distancia entre centros de ambas vías es un factor constante K, definido por la fabricabilidad del desvío y para dejar espacio suficiente para empalmar los siguientes tramos, (ver imágenes):



En este tipo de desvío una vez escogemos el ángulo "a", como "k" es una constante, entonces el valor del radio queda fijado.

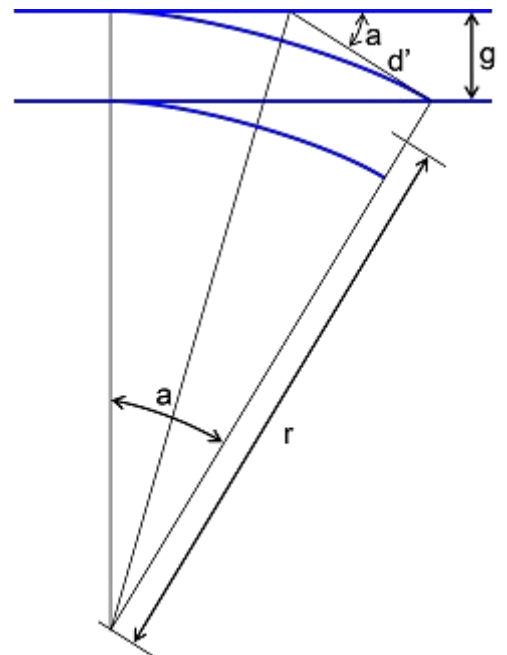
$$\left. \begin{aligned} k &= 2 \cdot t \cdot \sin(a/2) \\ r &= \frac{t}{\tan(a/2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{k}{2 \cdot \sin(a/2) \cdot \tan(a/2)}$$

para  $k = 1,75$  m, valor aproximado para una vía de ancho europeo de 1,435 m (separación entre raíl), y con los valores de "a" de la tabla, tenemos:

l:	7	9	10	14
a	8°07'48"	6°20'25"	5°42'38"	4°05'08"
r	140	190	245	500
r (calculado)	174	286	352	688

Claramente, los valores calculados para r son mayores que los indicados en la tabla.

Por tanto, la hipótesis inicial no es válida, (que el desvío es de tipo básico). Otra aproximación sería considerar que el arco del desvío termina al cruzarse con el otro raíl (continuando como vía recta).



$$\left. \begin{aligned} d' &= \frac{g}{\sin(a)} \\ r + \frac{g}{2} &= \frac{d'}{\tan(a/2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = g \cdot \left( \frac{1}{\sin(a) \cdot \tan(a/2)} - \frac{1}{2} \right)$$

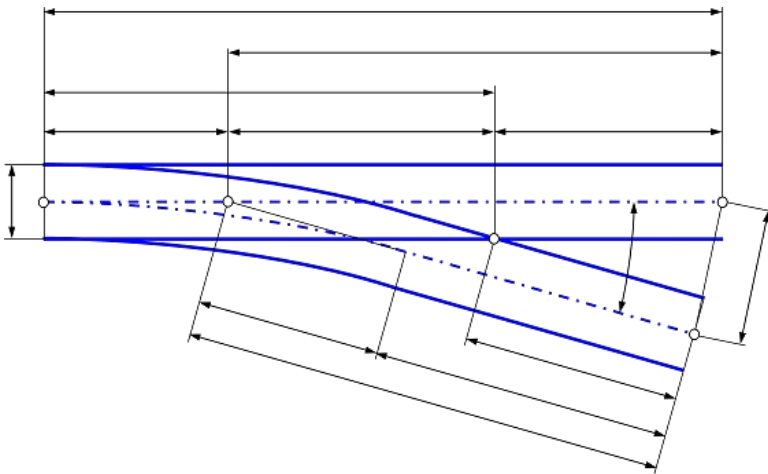
Aplicando de nuevo el valor del ancho de vía europeo 1,435 m para g, podemos recalcular los nuevos valores del radio:

l:	7	9	10	14
a	8°07'48"	6°20'25"	5°42'38"	4°05'08"
r	140	190	245	500
r (calculado)	142	234	288	564

Aunque nos hemos acercado más, los radios resultantes son aún mayores que los valores en la tabla.

Como resumen, parece que estamos muy cerca del significado de la tabla, pero no podemos tener una idea clara de la forma del desvío y cómo se aplican en éste los parámetros tabulados.

Generalizando, para un mismo ángulo "a" el valor del radio depende de la longitud del arco usado en el desvío (antes de conectar a la recta de salida): cuanto menor es el arco menor será el radio. O, si el radio viniera definido por experiencia empírica, entonces el desvío se ajustaría a éste.



Además, tampoco está claro porqué dar sólo los valores de "l:" y "d", en vez de parámetros directamente "aplicables" en campo (como se muestran en el caso genérico de la figura). Quizá el objetivo era dar datos que no se pueden obtener con la regla (tangentes y senos), y a partir de los cuales sí se puede obtener el resto.

Finalmente, en la página 52 de [4] aún se puede ver otra aproximación diferente. ¡Queda para el disfrute del lector!

Y de este modo tengo que dar por finalizado este estudio, al no disponer de más datos que aplicar o que permitan aclarar lo que todavía falta... ¡al menos hasta ahora! ¿Te apetece subir a bordo?



## 14.- AGRADECIMIENTOS

Este estudio no habría sido posible sin la colaboración y comentarios de Günter Kugel y Peter Holland para una primera aproximación a esta regla alemana, y de Gonzalo Martín, Ángel Carrasco, Álvaro González y Jorge Fábregas Zazza para el descifrado en detalle de los datos y fórmulas en el reverso de la regla. Pero, eso sí, todos los errores e inconsistencias ¡son solo culpa mía!

Por descontado, también le debo a mi esposa e hijos la paciencia y soporte sin los cuales no habría podido completar y documentar este estudio.

## 15.- BIBLIOGRAFÍA

Aunque los libros de reglas de cálculo no tienen en cuenta, normalmente, cálculos con las escalas pitagóricas de esta regla, sí que hemos encontrado documentación sobre la definición de trazados ferroviarios usada para aclarar las tablas en el reverso de la regla. A continuación las incluyo, pues, priorizando sus títulos a sus autores, para facilitar su búsqueda.

[1] Indicaciones de Günter Kugel, confirmadas en la página 67 de "Slide Rules: A Journey through three Centuries" de Dieter von Jezierski, 2000, (Ed. Astragal Press)

[2] "Curvas verticales en los trazados ferroviarios" de J.A.Escorado; páginas 537 a 542 de la "Revista de Obras Públicas", ejemplar de septiembre de 1987.

[3] "Éléments de Topographie" de E.Gabriel, 1911, páginas 320, 334 y 339 a 342 (Ed. A.Mame et Fils)



- [4] "Solution of Railroad Problems by the Slide Rule" de E.R.Cary, 1913, páginas 11 y 75 a 83 (Ed.D.Van Nostrand Co.)
- [5] Indicaciones de Günter Kugel, las cuales solo he podido confirmar con las descripciones de una página de un catálogo de la casa Reiss, recibida hacia el final de este estudio.
- [6] "Desvíos Ferroviarios", de José-Manuel García y Miguel Rodríguez, 1995, capítulo 6, "Geometría constructiva de desvíos" (presentado por RENFE).

\*\*\* Fin del Documento \*\*\*

