INSTRUÇÕES PARA A RÉGUA DE CÁLCULO

ARISTO

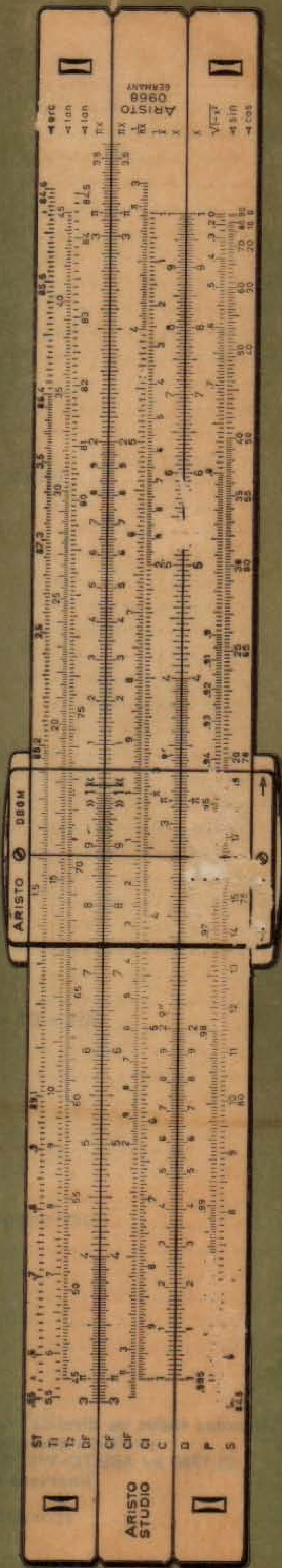
STUDIO
STUDIOLOG

868 - 0968 - 01068

0969

Régua com os números normais 1364

P



Impresso na Alemanha por Borek KG. · 1782

ÍNDICE

1. Geral

Estas instruções informam sobre as escalas da régua de cálculo, seu âmbito e as suas finalidades. Explica-se a utilização das escalas e quais as relações que entre elas existem. Mencionam-se exemplos referentes a cada escala para esclarecer os princípios e reunir tópicos.

Experiência no manejo hábil da régua de cálculo adquire-se com a prática. Para mais detalhes e exercícios recomenda-se o seguinte manual:

Stender and McKelvey: The Modern Slide Rule

1.1 O manejo da régua de cálculo

Para uma leitura segura convém que a régua se encontre numa posição que evite que surgam sombras resultantes dos traços do cursor. Os acertos da gaveta móvel são efectuados pelos movimentos do polegar e indicador duma mão, que segure na parte saliente da gaveta — logo junto ao corpo da régua —, enquanto a ponta do polegar da outra mão ofereça ligeira resistência ao deslize da gaveta (fig. 1).

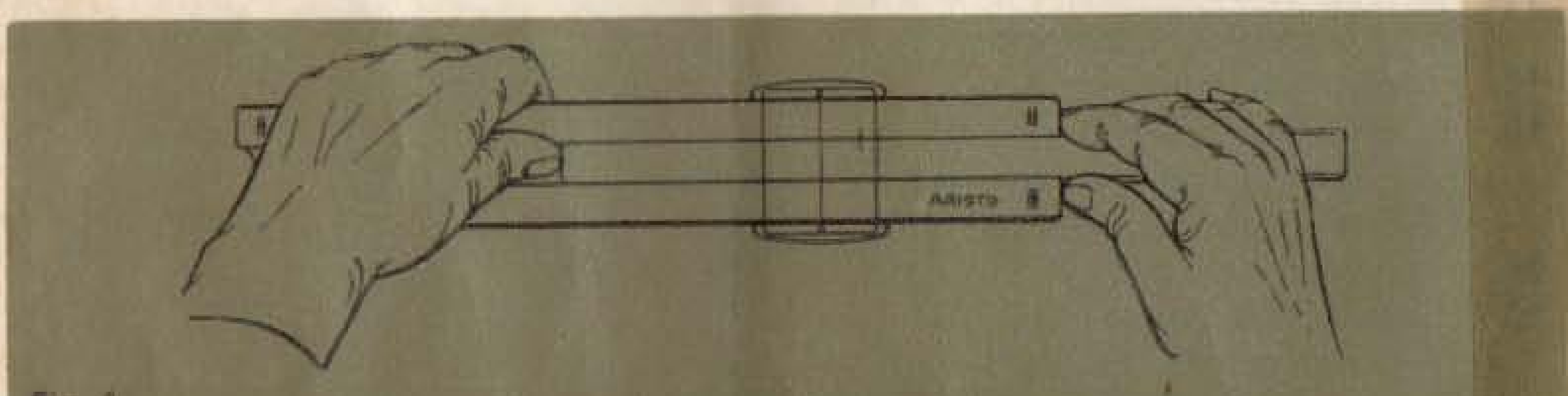


Fig. 1

O ajuste do cursor é possível com uma só mão, mas efectua-se com mais rapidez e exactidão com o indicador e o polegar das duas mãos, sendo conveniente conduzir o cursor com leve pressão contra o canto da régua, que se encontra oposto ao lado da mola do cursor. Assim o traço do cursor mantém-se perpendicular à graduação da régua.

1.2 Identificação do proprietário

No estojo das réguas de 25 cm e debaixo da escala com os números normais ARISTO NZ 1364, encontra-se uma janela própria para proteger um cartão com o nome do dono da régua.

1.3 Conservação da régua de cálculo ARISTO

A régua de cálculo, como valioso auxiliar de cálculo, merece ser tratada com cuidado. As escalas e o cursor devem-se proteger contra riscos e poeiras que podem afectar a exactidão das leituras.

É recomendável lavar, de vez em quando, a régua de cálculo com o produto especializado DEPAROL, polindo-a depois de seca. Nunca empregar produtos químicos quaisquer, porque podem inutilizar as graduações das escalas.

A régua de cálculo deve ser protegida de apagadores de plástico e dos seus vestígios, visto atacarem a superfície do ARISTOPAL.

Evitar deixar a régua em lugares quentes, exposta ao sol ou aos caloríficos, pois uma temperatura superior a 60° C origina deformações. Réguas alteradas nestas condições não poderão ser substituidas.

1.4 Os suportes nº 770
(só para o modelo 0968)

Os suportes nº 770 que acompanham as réguas ARISTO-Studio 0968 colocam-se lateralmente na régua, dando a esta uma posição levantada e inclinada, própria para uma boa leitura na secretária, facilitando, por exemplo, o trabalho simultâneo com tabelas. A posição levantada permite especialmente movimentos livres ao cursor com lupa.

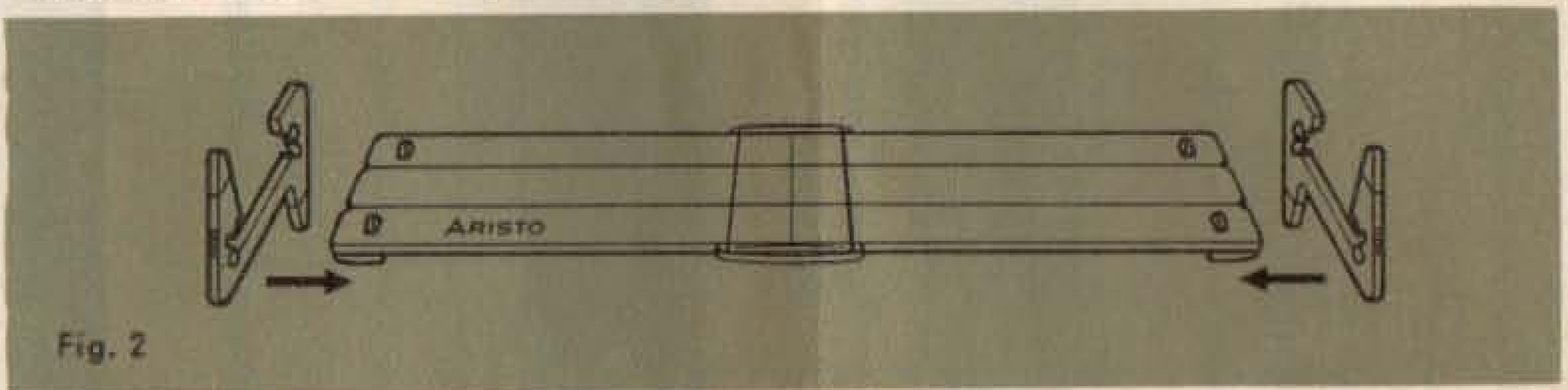


Fig. 2

Ao colocar os suportes nos dois extremos vira-se o lado dos ângulos da ARISTO-Studio para cima. Os suportes são postos com as ranhuras para a frente, encaixando as cavidades dos suportes nas pontes que unem as duas réguas graduadas.

1.5 Representação gráfica dos exemplos

Para mostrar a ordem das operações a executar, na resolução dos problemas que seguem, utilizou-se uma representação gráfica convencional e esquemática, mais expressiva do que reproduções da régua de cálculo. As escalas são figuradas por traços paralelos, definidos pelas designações daquelas, colocadas numa das suas extremidades. Usam-se também os símbolos seguintes:

Ponto de partida

Posições ou leituras seguintes

Resultado final

Posição ocasional ou leitura
de um resultado intermediário

Voltar a régua de cálculo

As setas indicam a ordem a seguir
e a direcção do movimento

Traço vertical representando o cursor

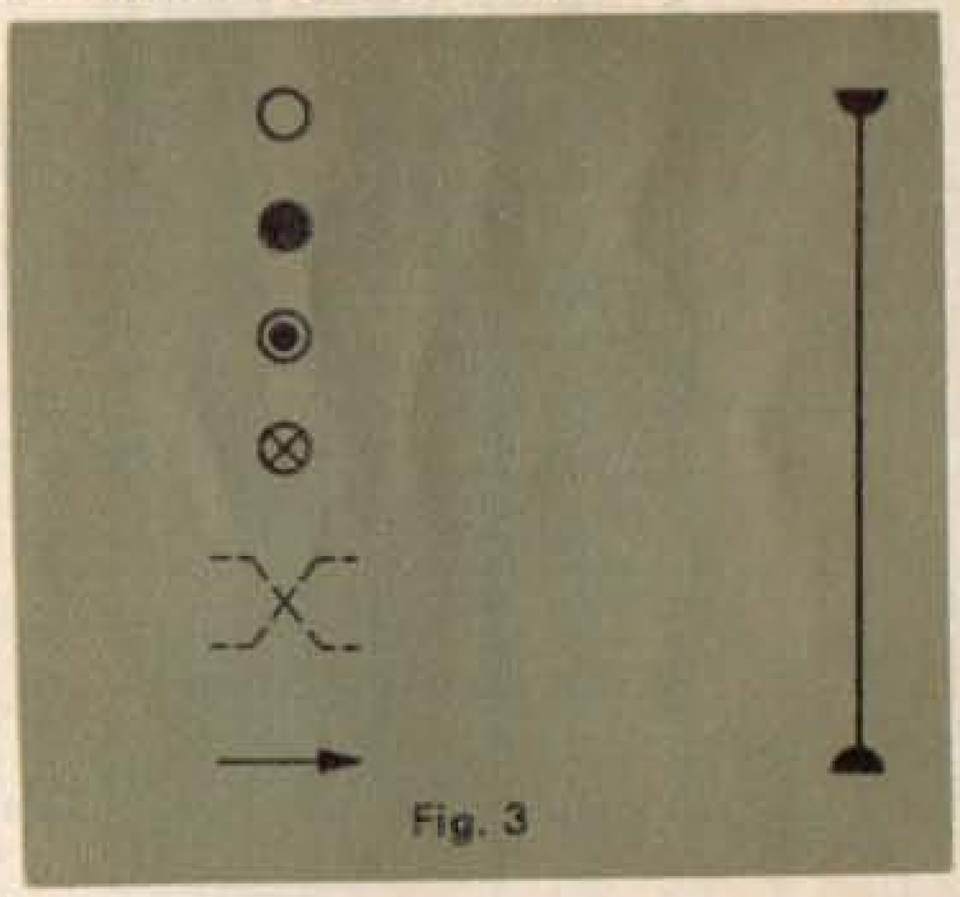


Fig. 3

RÉGUA DE CÁLCULO ARISTO-STUDIO

A ARISTO-Studio é uma régua de cálculo universal, com escalas exponenciais, própria para cientistas, engenheiros e estudantes.

2. Disposição das escalas

Do lado dos ângulos

ST	Escala de tangentes, de senos e para pequenos ângulos de 0,55° a 6°	∢ arc	Na parte superior da régua
T1	Escala de tangentes de 5,5° a 45°	∢ tan	
T2	Escala de tangentes de 45° a 84,5°	∢ tan	
DF	Escala fundamental transposta de π	πx	
CF	Escala fundamental transposta de π	πx	Na gaveta (parte móvel)
CIF	Escala de inversos de CF	$1/\pi x$	
CI	Escala de inversos de C	$1/x$	
C	Escala fundamental	x	
D	Escala fundamental	x	Na parte inferior da régua
P	Escala pitagórica	$\sqrt{1-x^2}$	
S	Escala de senos de 5,5° a 90° e, em sentido inverso, com numeração encarnada, de cosenos de 0° a 84,5°	∢ sin ∢ cos	

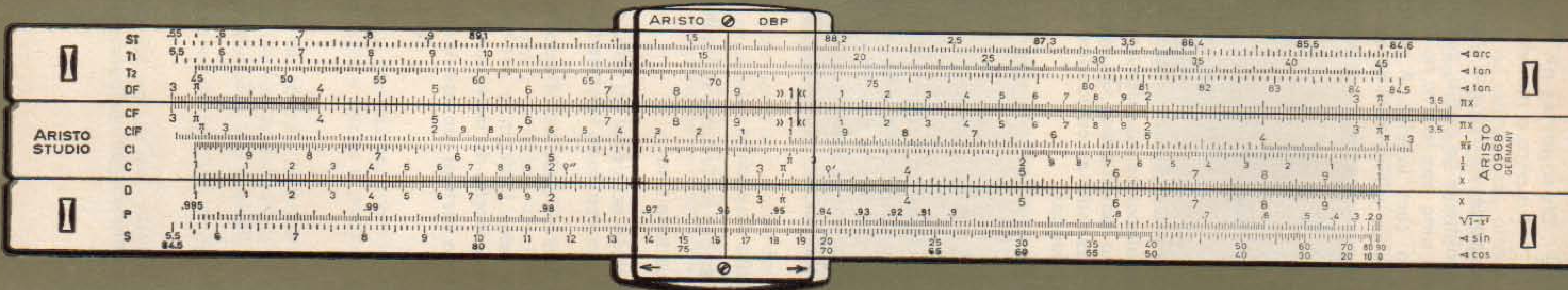


Fig. 4 Lado dos ângulos

Do lado das exponenciais

LL01	Escala exponencial, amplitude:	0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	Na parte superior da régua
LL02		0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
LL03		0,4 —10^{-5}	e^{-x}	
A	Escala de quadrados		x^2	
B	Escala de quadrados		x^2	Na gaveta (parte móvel)
L	Escala de mantissas (ou logarítmica)		lg x	
K	Escala de cubos		x^3	
C	Escala fundamental		x	
D	Escala fundamental		x	Na parte inferior da régua
LL3	Escala exponencial, amplitude:	2,5 —10^5	e^x	
LL2		1,1 —3,0	$e^{0,1x}$	
LL1		1,01—1,11	$e^{0,01x}$	

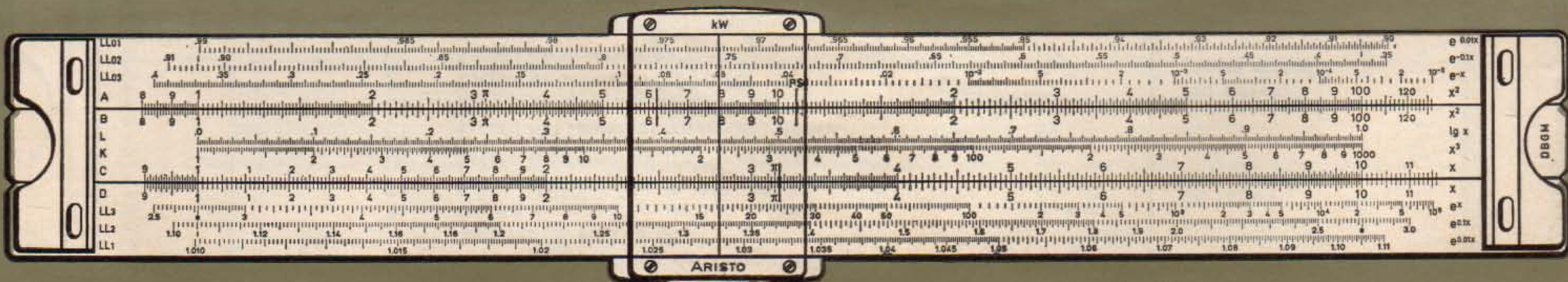


Fig. 5 Lado das exponenciais

RÉGUA DE CÁLCULO ARISTO-STUDIOLOG

Do lado dos ângulos	ST	Escala de tangentes, de senos e para pequenos ângulos de 0,55° a 6°.	∢ arc	Na parte superior da régua
	T1	Escala de tangentes de 5,5° a 45°	∢ tan	
	T2	Escala de tangentes de 45° a 84,5°	∢ tan	
	DF	Escala fundamental transposta de π	πx	
	CF	Escala fundamental transposta de π	πx	Na gaveta (parte móvel)
	CIF	Escala de inversos de CF	$1/\pi x$	
	S	Escala de senos de 5,5° a 90°	∢ sin	
	CI	Escala de inversos de C	$1/x$	
	C	Escala fundamental	x	
	D	Escala fundamental	x	Na parte inferior da régua
	DI	Escala de inversos de D	$1/x$	
	P	Escala pitagórica	$\sqrt{1-x^2}$	
	S	Escala de senos de 5,5° a 90° e, em sentido inverso, com numeração encarnada, de cosenos de 0° a 84,5°	∢ sin ∢ cos	

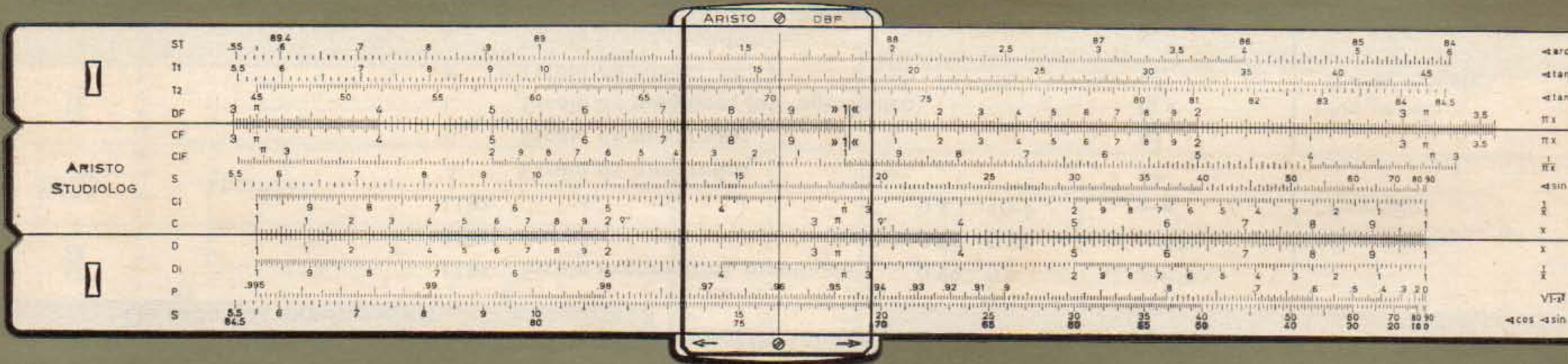


Fig. 6 Lado dos ângulos

Do lado das exponenciais

LL00	Escala exponencial, amplitude:	0,999 a 0,989	$e^{-0,001x}$	Na parte superior da régua
LL01		0,99 a 0,9	$e^{-0,01x}$	
LL02		0,91 a 0,35	$e^{-0,1x}$	
LL03		0,4 a 0,00001	e^{-x}	
A	Escala de quadrados		x^2	
B	Escala de quadrados		x^2	Na gaveta (parte móvel)
BI	Escala de inversos de B		$1/x^2$	
K	Escala de cubos		x^3	
L	Escala de mantissas (ou logarítmica)		lgx	
CI	Escala de inversos de C		$1/x$	
C	Escala fundamental		x	
D	Escala fundamental		x	Na parte inferior da régua
LL3	Escala exponencial, amplitude:	2,5 a 100000	e^x	
LL2		1,1 a 3,0	$e^{0,1x}$	
LL1		1,01 a 1,11	$e^{0,01x}$	
LL0		1,001 a 1,011	$e^{0,001x}$	

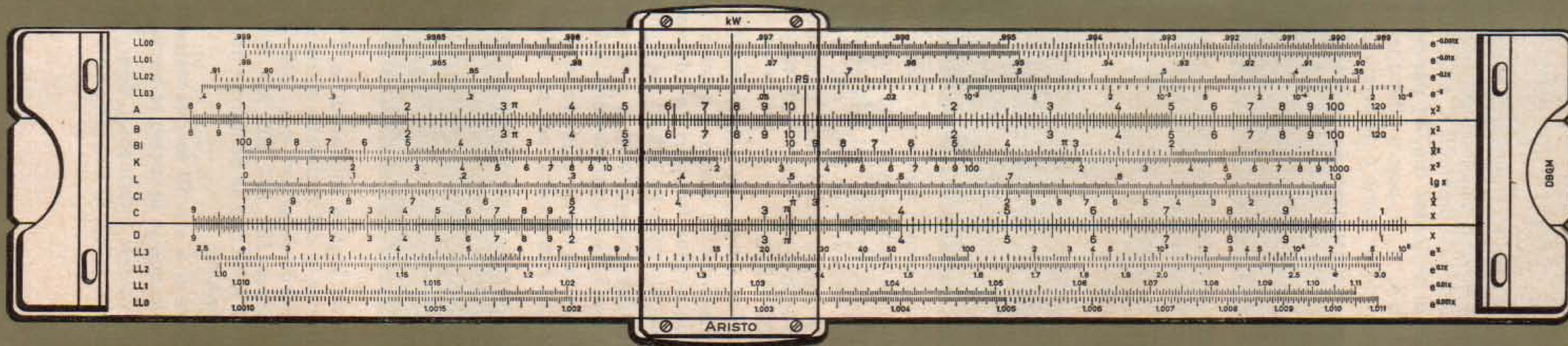


Fig. 7 Lado das exponenciais

3. Leitura das escalas

Para uma boa utilização da régua de cálculo é essencial saber ler as escalas com rapidez e segurança. As figuras 8 a 11 dão exemplos de leituras feitas nas escalas fundamentais C e D, que são as mais usadas. Os intervalos principais estão definidos (fig. 8) por traços transversais assinalados pelos números 1, 2, 3, 4, ... 1, pois o último traço marca-se com 1, em vez de 10, por se poder considerar como o princípio duma nova escala idêntica à precedente.

Fig. 8 Intervalos principais

O intervalo entre 1 e 2 está dividido em 10 partes, como numa escala métrica; porém esses intervalos parcelares vão diminuindo da esquerda para a direita. Note-se que esta escala da régua principia em 1 e não em 0. Esses intervalos parcelares estão subdivididos em 10 partes, também diminuindo no mesmo sentido.

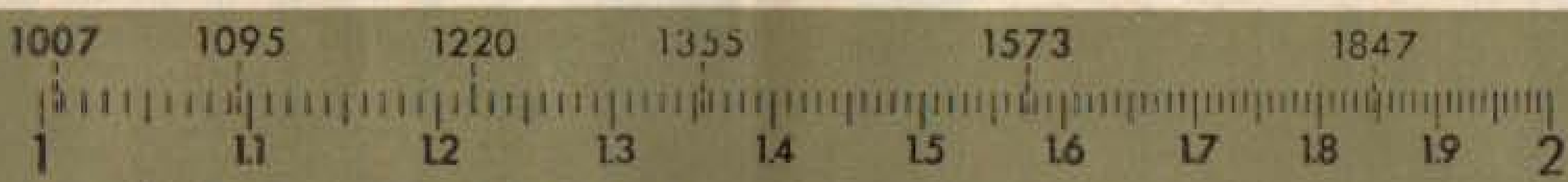


Fig. 9 Leituras no intervalo de 1 a 2

Numa escala métrica a divisão 2 pode equivaler a 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m etc. Do mesmo modo, na régua de cálculo, os números lidos não indicam a posição da vírgula. Por isso se aconselha a enunciá-los sucessivamente, dizendo por ex. um-nove-oito e não cento e noventa e oito. Como exercício desloque-se o traço do cursor, do 1 para a direita, lendo-se em cada um dos traços da graduação o seu valor: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, etc.

Sendo o traço do cursor muito fino, em relação ao intervalo entre dois traços sucessivos da escala, é possível colocá-lo a meio daquele. Como a vista consegue avaliar fracções de intervalo, é possível, com uma certa prática, levar a aproximação da leitura até à décima parte deste.

Continuando a deslocar o cursor tem-se, por estimativa, por ex. entre os traços 131 e 132, sucessivamente: 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, etc.

É preciso tomar cuidado com os zeros, sobretudo nas leituras feitas perto dos traços numerados; por ex. 1000, 1001, 1002, 1003, etc. (veja-se a fig. 9).

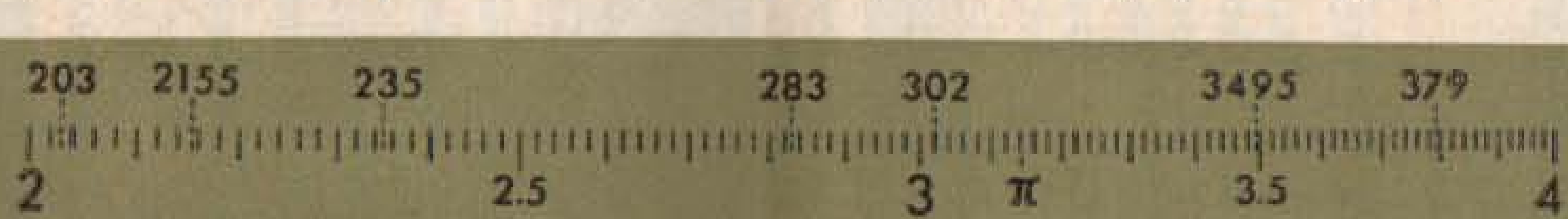


Fig. 10 Leituras no intervalo de 2 a 4

Como logo à esquerda do 2 os traços já aparecem muito apertados, à sua direita, e até à divisão 4, só se representaram os traços correspondentes aos números de ordem par: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, etc. Os valores ímpares: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, etc. estarão pràticamente a meio dos intervalos que se definiram daquele modo. A fig. 10 apresenta alguns exemplos de leitura.

Entre o 4 e o 10 os intervalos da subdivisão correspondem a 5 unidades, de modo que se lê sucessivamente: 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430, etc.

Os valores intermédios determinam-se por estimativa. Assim 4025 fica a meio de 400 e 405. O 402 estará um pouco à esquerda desse ponto e o 403 um pouco

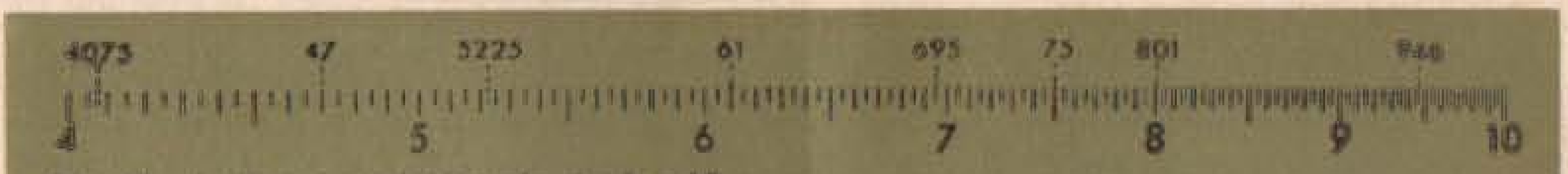


Fig. 11 Leituras no intervalo de 4 a 10

à direita. No centro do intervalo que se segue tem-se o 4075. Na fig. 11 estão alguns exemplos.

4. Leitura das escalas na régua de bolso

(só para o modelo 868)

Atendendo ao menor comprimento das réguas de bolso, as suas escalas têm uma graduação diferente da régua de 25 cm. Os três diferentes intervalos básicos surgem aqui numa outra sequência:

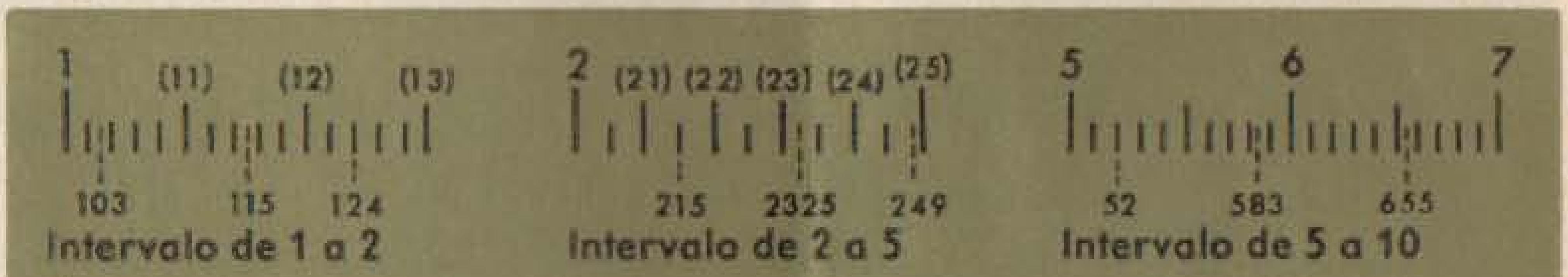


Fig. 12

Entre o 1 e o 2 só se encontram numerados os valores 1, 1,5 e 2. Os decimais são indicados pelos traços maiores, p. e. (12). Os traços intermédios mais curtos representam duas unidades da próxima subdivisão, p. e. 124. Estes traços curtos são da ordem par; os valores ímpares acham-se a meio dos intervalos (p. e. 103).

Nos intervalos dos traços numerados de 2 a 5 lê-se a segunda casa nos traços compridos (p. e. 23). Os traços curtos indicam o 5 da próxima subdivisão (p. e. 215), sendo os valores intermédios determinados por estimativa.

Entre o 5 e o 10 estão novamente numerados só as primeiras cifras. A subdivisão lê-se como numa régua de milímetros pelos traços curtos, p. e. 52. A próxima casa acha-se por estimativa, entre os traços curtos (p. e. 583).

5. O cálculo aproximado

No cap. 3 expõe-se como a régua só permite o ajuste e a leitura de sequências de cifras. Só por meio dum cálculo aproximado se pode determinar a posição da vírgula no resultado da operação, e ao mesmo tempo obter um controlo referente ao primeiro número lido na régua.

Normas para cálculos aproximados:

Arredondar os valores!

p. e. $3{,}43 \approx 3$ $\quad 9{,}51 \approx 10$ $\quad 7{,}61 \approx 8$

Para multiplicações, arredondar um factor para cima, o outro para baixo!

p. e. $8{,}92 \cdot 127 \approx 10 \cdot 120 \approx 1200$

$2{,}19 \cdot 9830 \approx 2 \cdot 10000 \approx 20000$

Simplificar as divisões!

Arredondar divisor e dividendo no mesmo sentido.

p. e. $\frac{725}{539} = \frac{7{,}25}{5{,}39} \approx \frac{7}{5} \approx 1{,}4$

$$\frac{640 \cdot 15{,}3}{51 \cdot 0{,}8} \approx \frac{60 \cdot 20}{5 \cdot 1} \approx 240$$

A separação das potências de dez simplifica o uso de valores muito altos ou muito baixos.

p. e. $73215 \approx 7 \cdot 10^4$ $\quad 0{,}0078 \approx 8 \cdot 10^{-3}$

$89 \approx 9 \cdot 10^1$ $\quad 0{,}706 \approx 7 \cdot 10^{-1}$

Assim facilita-se a multiplicação ou divisão com valores de muitas cifras!

p. e. $0{,}07325 \cdot 0{,}000513 \approx 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \approx 40 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-5}$

$$\frac{2950}{0{,}00598} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}5 \cdot 10^6$$

6. O sistema de cálculo

Os cálculos com a régua correspondem, na prática, a uma soma ou a uma subtracção mecânica de comprimentos. Isto pode-se exemplificar fácilmente com duas escalas graduadas uniformemente, por ex. em milímetros, deslizando uma contra a outra.

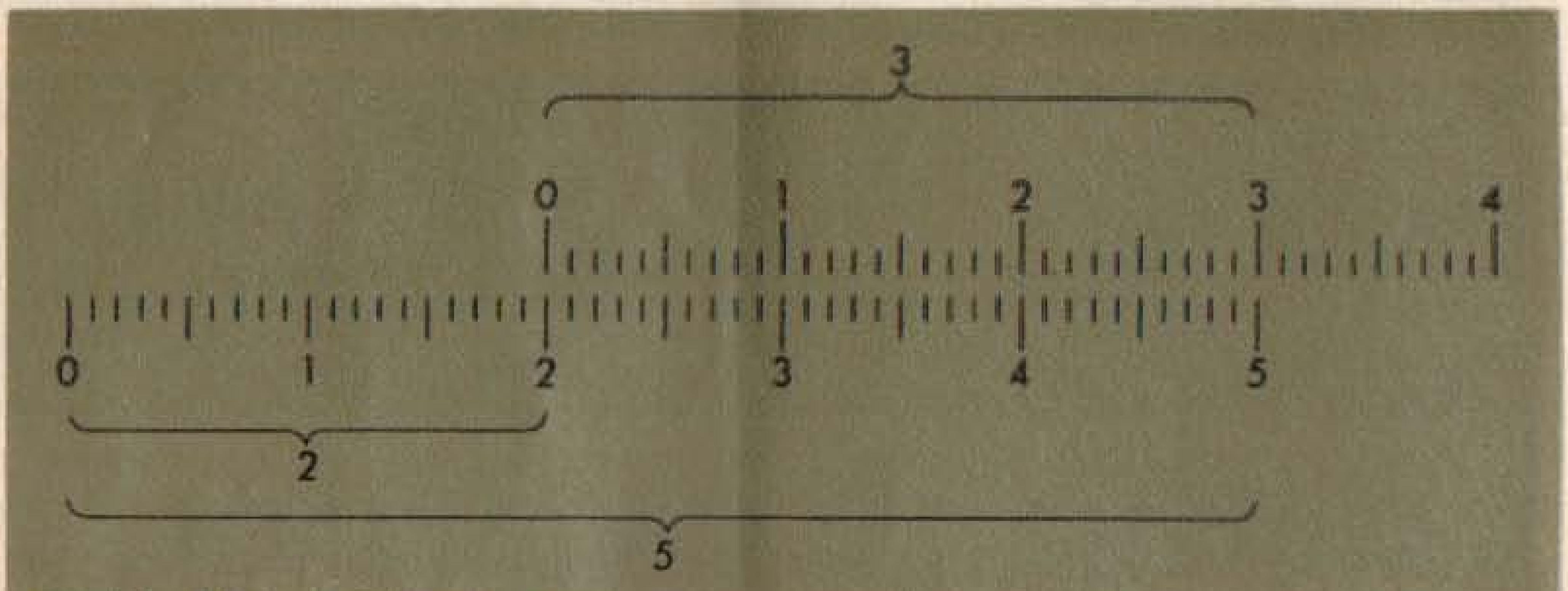


Fig. 13 Adição gráfica com escalas

A fig. 13 dá como ex. 2 + 3 = 5. Porque o início da escala de cima coincide com o 2, da de baixo, é possivel somar-lhe o comprimento 3 daquela, lendo-se o resultado (5) na escala inferior. Na fig. também se podia obter 2 + 1 = 3, ou 20 + 15 = 35 tomando como unidade as divisões menores.

Nesta fig. 13 também se podia efectuar a subtracção 5 — 3 = 2, procedendo-se de modo inverso. Do segmento igual a 5, da escala de baixo, diminui-se o segmento 3, da de cima, ajustando os valores respectivos (5 e 3) e lendo a diferença (2) na escala inferior, por baixo da extremidade inicial do segmento subtractivo.

Na régua de cálculo existem escalas ou graduações várias no corpo da régua e numa régua móvel dentro daquela. Chamaremos gaveta a esta e, simplesmente, régua, àquela. Como as escalas das réguas de cálculo têm uma graduação logarítmica, a uma soma de segmentos corresponde uma multiplicação e a uma diferença destes, uma divisão.

7. Multiplicação

(Soma de segmentos)

Para 18 · 13 começa-se por ajustar o início (1) da escala C, da gaveta, com o valor 18 lido na escala D, da régua. Deslocando o cursor até à divisão 13 de C tem-se a soma dos segmentos correspondentes a 13 e a 18, o que dá o resultado 234, lido em D, sob o traço do cursor. A posição da vírgula determina-se por meio dum cálculo aproximado, com numeros redondos (20 · 10 = 200).

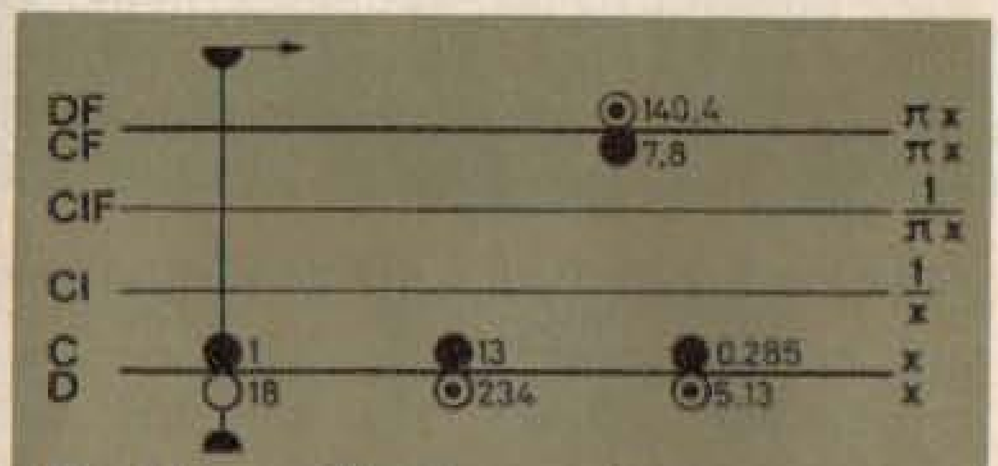


Fig. 14 18 · 13 = 234
18 · 0,285 = 5,13
18 · 7,8 = 140,4

Dum modo análogo se calculava 18 · 0,285 = 5,13.

O produto 18 · 7,8 não se pode resolver com a posição anterior. É necessário deslocar a gaveta para a esquerda, de todo o seu comprimento, de modo a

coincidir o outro extremo de C com o 18 de D. Na ARISTO-Studio ou na ARISTO-StudioLog pode-se evitar este novo movimento da gaveta, continuando o cálculo com o par de escalas transpostas CF/DF.
Estas escalas CF e DF são iguais às escalas C e D, mas estão deslocadas, em relação àquelas, de modo que o índice 1 se encontra aproximadamente a meio da régua. Isto corresponderá, pois, a ter prolongado as escalas C e D de metade do seu comprimento. Quando p. e. o 1 de C corresponde ao 18 de D, tem-se a mesma correspondência no outro par de escalas: o 1 de CF ajusta-se com o 18 de DF, e por isso a multiplicação com o factor 18 pode realizar-se tanto num como noutro par de escalas. O exemplo 18 · 7,8 é calculado com as escalas CF/DF, fazendo-se coincidir o traço do cursor com 7,8 da escala CF, para obter o resultado 140,4 em DF.

8. Divisão

(Inverso da multiplicação: subtracção de segmentos)

Para 2620 : 17,7 o traço do cursor ajusta-se com a leitura 2620 da escala D, deslocando-se a gaveta até ao valor 17,7 da escala C coincidir com aquele traço; o resultado 148 ficará em D, sob o início da escala C. Noutros casos poderá ficar sob o final desta escala.

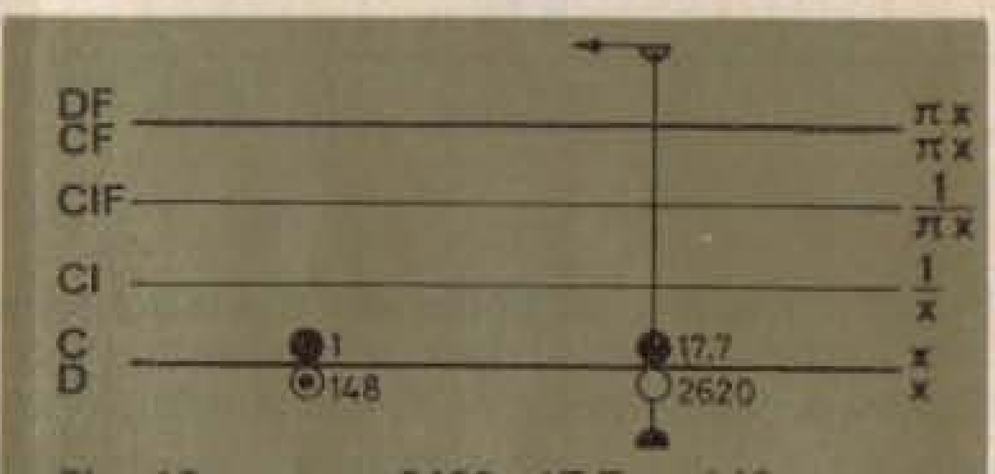


Fig. 15 2620 : 17,7 = 148
aprox. 3000 : 20 = 150

Também se podia fazer a leitura final em DF, acima do 1 de CF.

A posição da gaveta é, evidentemente, a mesma que para a multiplicação: 148 · 17,7 = 2620. Para a divisão obtem-se o resultado na parte fixa da régua, junto do princípio ou fim da escala da gaveta móvel. Não há «translação» da gaveta. Mais adiante se aproveitará esta particularidade.

9. As escalas transpostas CF e DF

Estas escalas são iguais às escalas C e D mas estão deslocadas para a esquerda, em relação a estas, de um comprimento correspondente ao valor de $\pi = 3,142$. Os índices 1 de CF e DF, ficando quase a meio da régua, é como que o prolongamento das escalas C e D em metade do seu comprimento. Deste modo se evitam movimentos da gaveta nas multiplicações e cálculos de tabelas ou de proporções, o que é muito vantajoso.
O índice 1 de CF funciona sempre, em relação à escala DF, como os índices 1 ou 10, de C, perante a escala D. Podem-se pois começar as multiplicações com o par de escalas CF/DF sem ter que se pensar sobre o índice a ajustar. Executando divisões com estas escalas ficam o numerador e o denominador na mesma posição que nas fracções.
Os dois pares de escalas CF/DF e C/D formam um único conjunto de trabalho, pois se o resultado se não puder ler num deles, passa-se para o outro, sem mover a gaveta. A coloração amarela das escalas C e CF serve para estabelecer a sua correspondência, evitando os enganos que podem resultar de C deslizar acima de D e o CF abaixo de DF.

9.1 Cálculo de tabelas sem «translação» da gaveta

$y = 29\,x$

x	1,7	3,45	5,0	10
y	49,3	100	145	290

Para x = 5 pode-se ler sobre o par superior de escalas CF e DF, sem mais movimentos da gaveta.

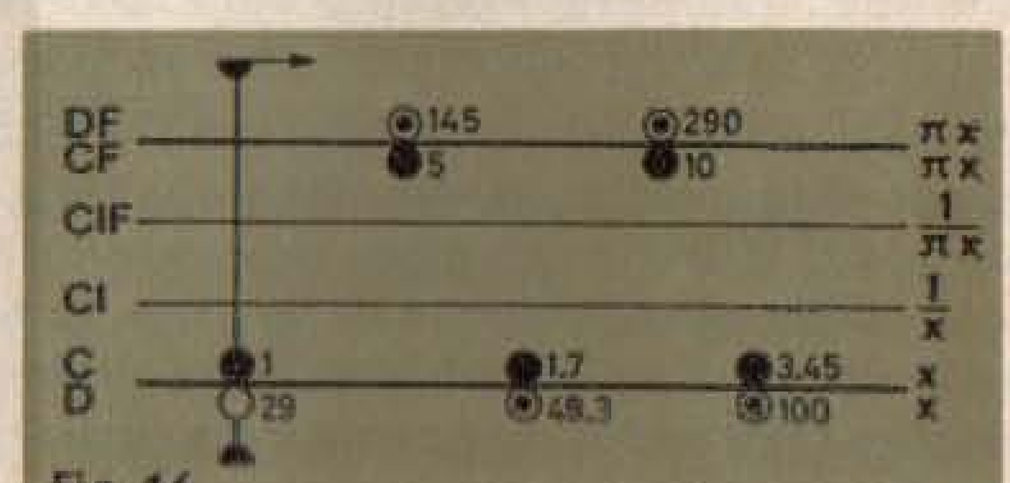


Fig. 16

$$y = \frac{28,2}{x} = 28,2 \cdot \frac{1}{x}$$

x	7,43	2,92	1,567
y	3,795	9,66	18,0

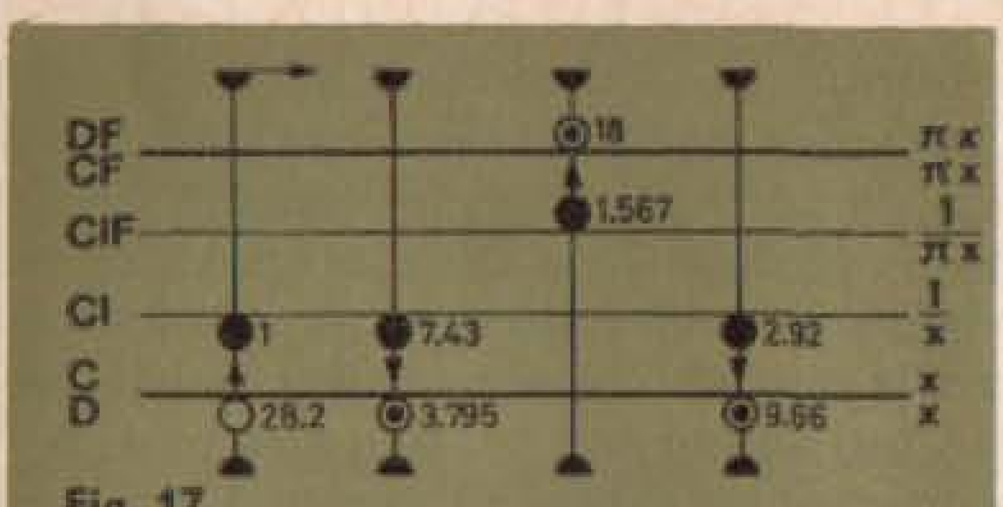


Fig. 17

$$y = \frac{x}{18,2} = \frac{1}{18,2} \cdot x$$

x	3,17	112,1
y	0,1742	6,16

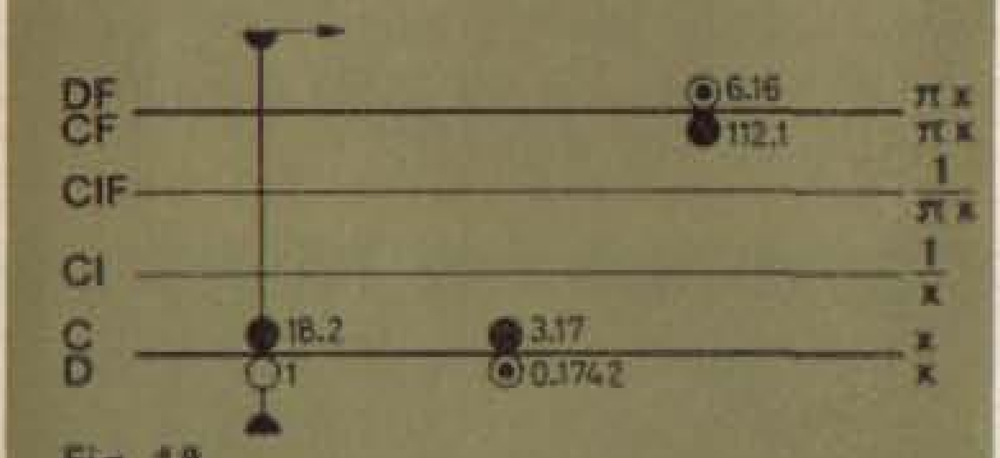


Fig. 18

9.2 Multiplicação ou divisão imediata por π

Como as escalas CF, DF e CIF estão deslocadas de um valor igual a π, em relação a C, D e CI, resulta outra vantagem ainda. Ao passar, por ex., de uma leitura feita em C para outra, que lhe corresponda, em CF, tem-se um produto por π. Procedendo em sentido inverso ter-se-á uma divisão por π.

Assim, ajustado o traço do cursor com o diâmetro d de uma circunferência, lido em D, tem-se acima, em DF, o respectivo perímetro $P = \pi d$. Análogamente se calcularia a velocidade angular $\omega = 2 f\pi$.

Em expressões que contenham o número π convém deixar este para o fim das operações e utilizar as escalas CI e CIF.

A fig. 19 demonstra o conjunto das operações possíveis com o factor π com um só acerto do cursor.

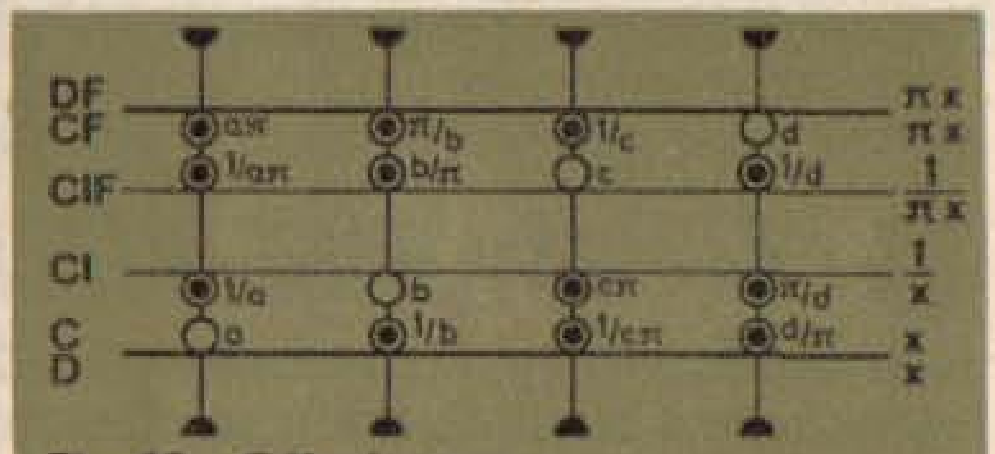


Fig. 19 Cálculo com π

Para cálculos com o factor 360: Ver cap. 21.1.

10. Multiplicação e divisão simultâneas

Com uma expressão do tipo $\frac{a \cdot b}{c}$ efectua-se primeiro a divisão e depois a multiplicação, sem necessidade de determinar o cociente. Assim, no ex. da fig. 20, não haverá que ler o resultado intermediário 2,61 = 345 : 132; leva-se logo o traço do cursor ao valor 22 de C, lendo por baixo o resultado 57,5 na escala D.

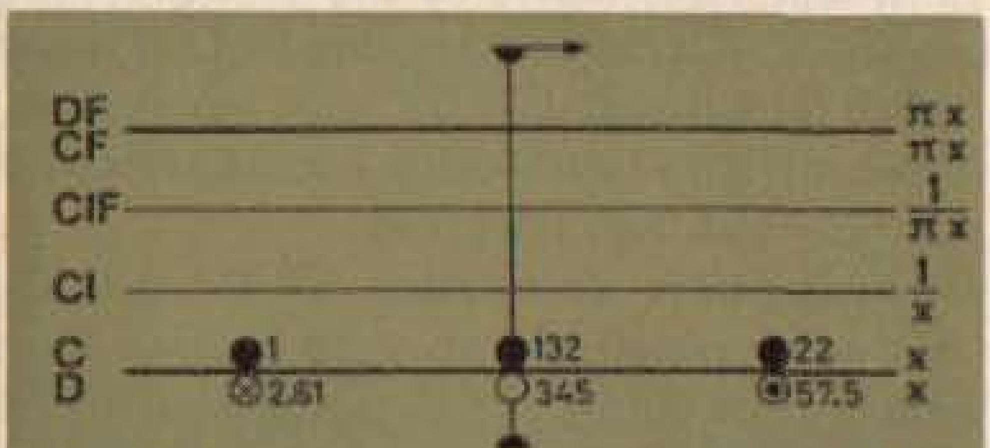


Fig. 20

Introduzindo neste exemplo um factor suplementar 19,5 no denominador,

$$\frac{345 \cdot 22}{132 \cdot 19,5} = 29,5$$

o resultado obtido na fig. 20 é dividido em seguida, colocando a valor 19,5 na escala C debaixo do traço do cursor, dividindo assim 57,5 por 19,5. Em operações deste género com mais factores tanto no numerador como no denominador, procede-se simplesmente multiplicando e dividindo alternadamente. As deslocações alternadas da gaveta e do cursor proporcionam um trabalho fluente com um mínimo de movimentos.

Nestas operações pode acontecer que a gaveta, depois duma divisão, ressalte demasiadamente do corpo da régua. Neste caso, antes da próxima multiplicação, a gaveta tem que ser «transladada». Por uma escolha cuidadosa dos acertos com as escalas C/D ou CF/DF evita-se muitas vezes este inconveniente.

11. As escalas de inversos CI e CIF

A escala CI é igual às escalas fundamentais C e D, mas está disposta em sentido inverso e graduada a vermelho para evitar erros de leitura.

Assim: lido x em C tem-se, por correspondência, em CI o seu inverso 1/x. Por cima de 5 é 1/5 = 0,2 em CI. Mais vantajoso é, no entanto, o uso da escala de inversos no sentido contrário. Passando de CI para C tem-se p. e. debaixo do 4 em CI o valor 1/4 = 0,25 em C.

A leitura ocasional de valores inversos não justificaria a existência das escalas de inversos; o seu verdadeiro valor é evitar muitas manipulações inúteis em operações complexas.

$$\frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} \text{ e } 4 \cdot 5 \text{ equivale a } \frac{4}{1/5}.$$

Esta expressão é invulgar, mas oferece a vantagem de transformar uma divisão numa multiplicação, e vice-versa. Um exemplo com valores muito simples demonstra perfeitamente a utilidade desta transformação:

1. Colocando o cursor sobre o 6 da escala D e movendo o 2 da escala C para debaixo do traço do cursor, obtém-se a habitual divisão 6 : 2 = 3 (fig. 21). Se, no entanto, deixarmos o cursor no seu lugar e movermos a gaveta, para colocar o 2 da escala CI por debaixo do traço do cursor, obtemos a multiplicação 6 · 2, estando o resultado 12 debaixo do 1 da gaveta, como numa divisão (fig. 22). Na verdade efectuamos a divisão 6 : 0,5 = 12, pois simultâneamente com o 2 de CI colocamos o inverso 0,5 de C por debaixo do traço do cursor.

2. Deixando, agora, o 1 da escala C por cima do 12 na D, e colocando o cursor sobre o 4 na escala C, obteremos a habitual multiplicação 12 · 4 = 48 (fig. 23). Mas desde que movamos o cursor para 4 em CI, leremos o resultado da divisão 12 : 4 = 3 em D (fig. 24). Por outras palavras: Visto que se tem debaixo de 4 em CI o inverso 1/4 = 0,25 em C, efectuou-se na realidade a multiplicação 12 · 0,25 = 3.

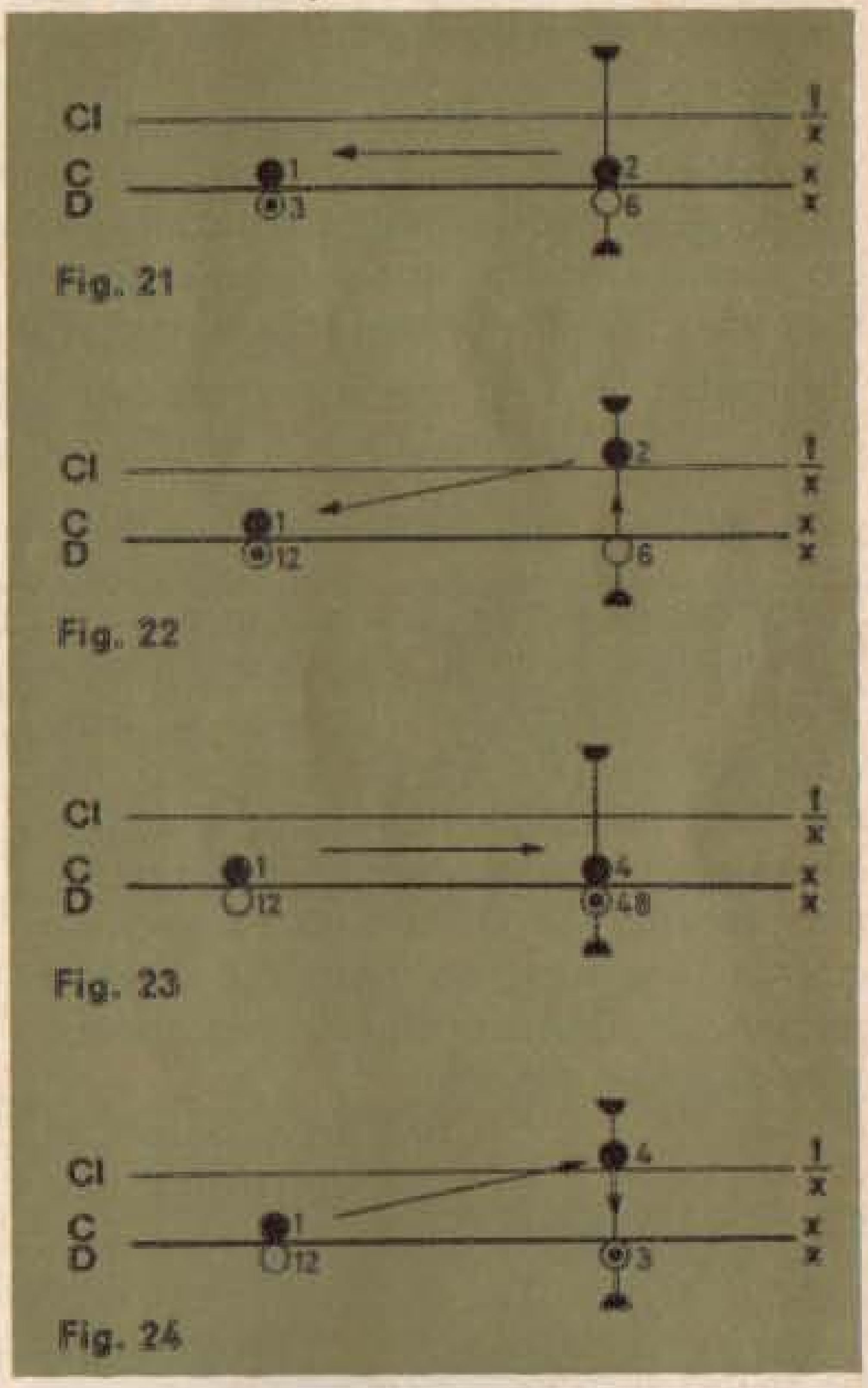


Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24

Existem portanto para cada multiplicação ou divisão duas possibilidades da cálculo, e o operador experiente escolherá aquela, que lhe proporciona em problemas compostos um ritmo alternado de divisão e multiplicação.

As relações existentes entre as escalas C e CI subsistem da mesma maneira entre as escalas CF e CIF. Para se familarizar com o método descrito torna-se útil repetir as mesmas operações com o grupo de escalas CF/DF/CIF. O estudo atento dos capítulos anteriores permite reconhecer a lógica que existe no complemento do sistema de escalas pela CIF. E quem souber aproveitar devidamente as vantagens das escalas transpostas, necessitará da escala CIF tantas vezes como da escala CI.

As expressões da forma $a \cdot b \cdot c$ ou $\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$, etc. resolvem-se alternando as divisões e as multiplicações, como no caso da multiplicação e divisão simultâneas (cap. 10). No cálculo pode-se passar do grupo de escalas C, D e CI para o das escalas CF, DF e CIF, para evitar novos movimentos da gaveta, nas multiplicações.

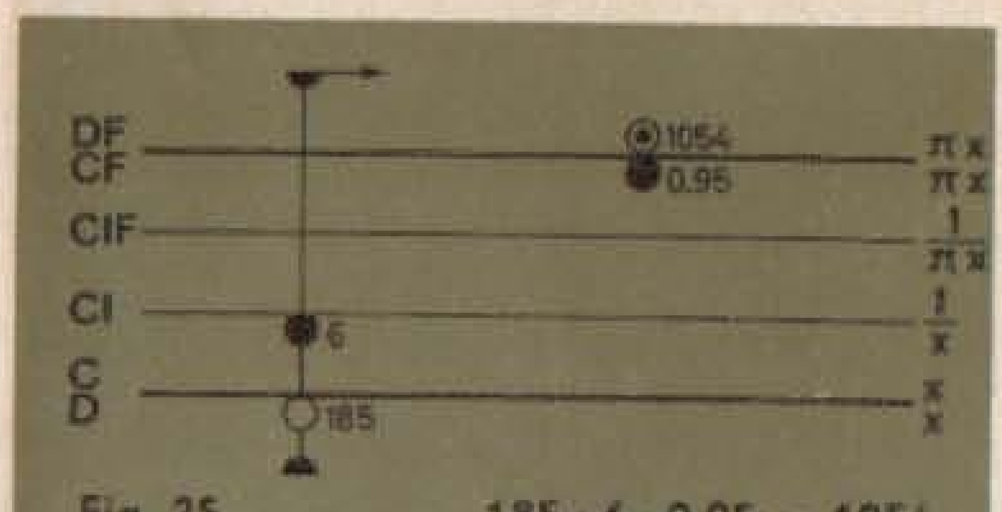


Fig. 25

No exemplo da fig. 25 opõem-se os factores 185 (na escala D) e 6 (na escala CI) como numa divisão, efectuando a multiplicação com 0,95 na escala superior CF. O resultado 1054 tem-se em DF sobre 0,95 de CF.

11.1 A escala de inversos DI
(só para o modelo 0969)

A escala de inversos DI confere vantagens, quando ocasionalmente numa operação de cálculo se convertam as funções das escalas da parte fixa da régua e as da gaveta móvel, p. e. no cálculo com proporções.

12. Proporções

As proporções da forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ resolvem-se muito fàcilmente, com a régua de cálculo, porque basta acertar um daqueles numeradores com o correspondente denominador (como para a divisão) para se dar a mesma correspondência entre os restantes. As leituras fazem-se só com o deslocamento do cursor. A linha que separa a gaveta da régua até fica na posição dos traços das fracções. É mesmo este o processo preferível para este género de cálculo.

Exemplo: 9,5 kg duma mercadoria custam DM 6,30. Quanto custam 8,4 kg?
A solução na forma duma regra de três será:

$$\frac{6,30}{9,50} \cdot 8,4 = 5,57$$

A operação ganha clareza quando se apresenta a relação de pesos e preços como proporção. Opondo o peso conhecido de 9,5 em DF ao preço 6,30 em CF, têm-se contrapostos todos os possíveis pesos e preços equivalentes, nas escalas CF/DF e C/D respectivamente. Em face do peso 8,4 lê-se o preço 5,57. Outras relações peso/preço demonstra a fig. 26.

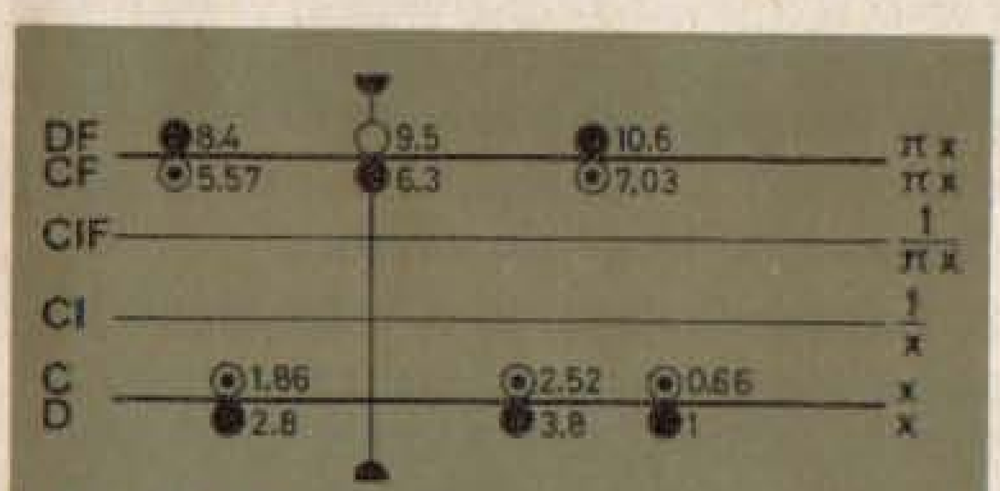


Fig. 26 Proporções

10,6 kg custam DM 7,03 (escalas CF/DF)
3,8 kg custam DM 2,52 (escalas C/D)
2,8 kg custam DM 1,86 (escalas C/D)
1 kg custa DM 0,66 (escalas C/D)

A proporção pode completar-se à vontade:

$$\frac{kg}{DM} = \frac{9,5}{6,3} = \frac{8,4}{5,57} = \frac{10,6}{7,03} = \frac{3,8}{2,52} = \frac{1}{0,66} = \text{etc.} \ldots$$

O cálculo com proporções efectua-se independentemente das regras expostas nos capítulos anteriores. Não importa, onde e como se contrapõem os pesos e preços. O que é preciso sómente é que se procurem os pesos sempre na mesma escala onde se marcou o primeiro peso, e os preços sempre na escala oposta. No exemplo acima o valor 6,3 também se pode pôr na escala DF e 9,5 em CF; neste caso o resultado 5,57 é lido na escala DF, em face de 8,4 da escala CF.

Este princípio da proporcionalidade directa $a : b = c : d$ aplica-se igualmente à proporcionalidade inversa, expressa pela igualdade dos produtos $a \cdot b = c \cdot d$, recorrendo-se às escalas de inversos (ver cap. 11). Finalmente, este princípio aplica-se da mesma maneira às proporções mixtas do tipo $a \cdot b = c : d$ e $a : b = c \cdot d$.

13. Escalas A, B e K

Colocando o traço do cursor sobre um valor qualquer x da escala C tem-se, na escala B, o seu quadrado x^2 e o cubo x^3 na escala K. Efectuando os cálculos em sentido inverso daqueles tem-se a raiz quadrada e a raiz cúbica.

a) $2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8$

b) $32{,}7^2 = 3{,}27^2 \cdot 10^2 = 1070$

$32{,}7^3 = 3{,}27^3 \cdot 10^3 = 35\,000$

c) $\sqrt[2]{9} = 3 \qquad \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[2]{51} = 7{,}14 \qquad \sqrt[3]{364} = 7{,}14$

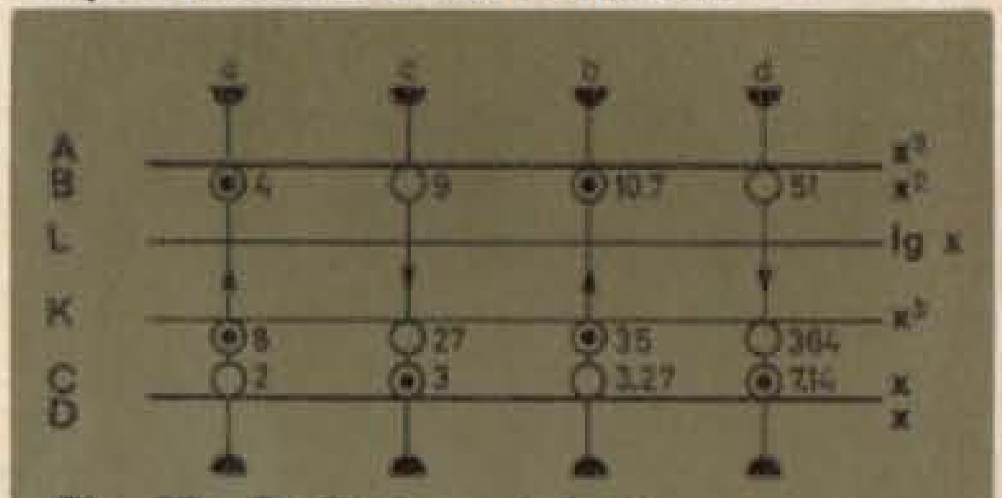


Fig. 27 Potências e raízes

A forma mais fácil de determinar a posição da vírgula é por meio dum cálculo aproximado.
No cálculo de potências e raízes há vantagem em separar convenientemente as potências de 10, de modo a obterem-se números com que se possa avaliar sem dificuldade o resultado. Por isso se recomenda considerar a escala dos quadrados graduada de 1 a 100 e a dos cubos de 1 a 1000.

Exemplos: $\sqrt{3200} = \sqrt{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{32} = 10 \cdot 5{,}66 = 56{,}6$

$$\sqrt[3]{0{,}1813} = \sqrt[3]{\frac{181{,}3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181{,}3} = \frac{1}{10} \cdot 5{,}66 = 0{,}566$$

13.1 O cálculo com as escalas A e B

As escalas A e B são idênticas, tal como o grupo de escalas fundamentais C e D, apenas com a diferença de serem compostas de duas escalas fundamentais reduzidas a metade e alinhadas. A sua parte esquerda comporta a numeração de 1 a 10 e a parte direita de 10 a 100. Assim, com o conjunto das escalas A e B também se pode trabalhar como com as fundamentais, porém com menor precisão. Todavia, quando se começou por um cálculo de quadrados, resulta mais cómodo continuar as operações nas mesmas escalas.
As escalas alinhadas têm a vantagem de não haver permutas de gaveta.

13.2 A escala BI
(só para o modelo 0969)

A escala BI, de inversos de B, torna possível utilizar as escalas de quadrados com a escala dos seus inversos como escalas fundamentais.

14. A escala pitagórica P

Num triângulo rectângulo de hipotenusa 1 será: $y = \sqrt{1 - x^2}$.
Lido o x na escala fundamental tem-se, em correspondência, sobre a escala pitagórica P o valor de $y = \sqrt{1 - x^2}$.
Inversamente tem-se: $x = \sqrt{1 - y^2}$.

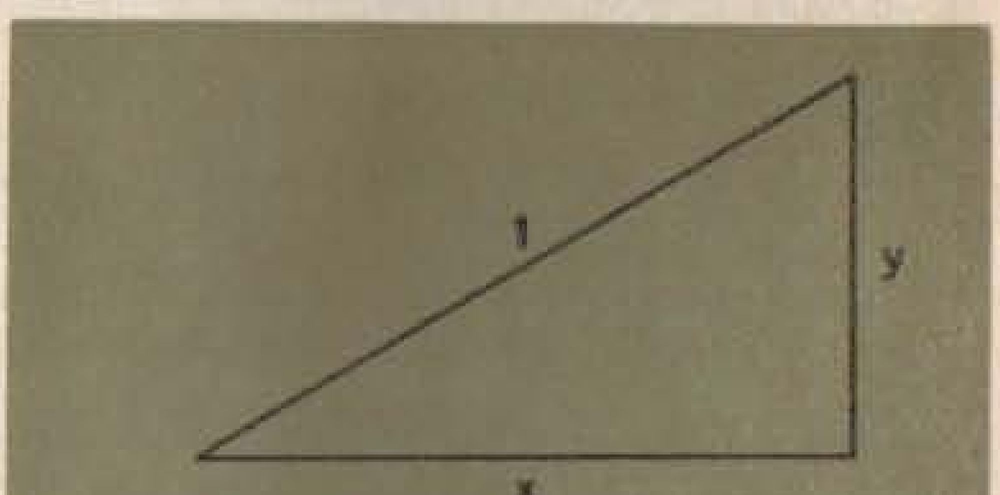


Fig. 28

A fig. 29 demonstra que 0,6 pode ser utilizado tanto na escala D como na escala P. O resultado tem-se na respectiva escala vizinha.

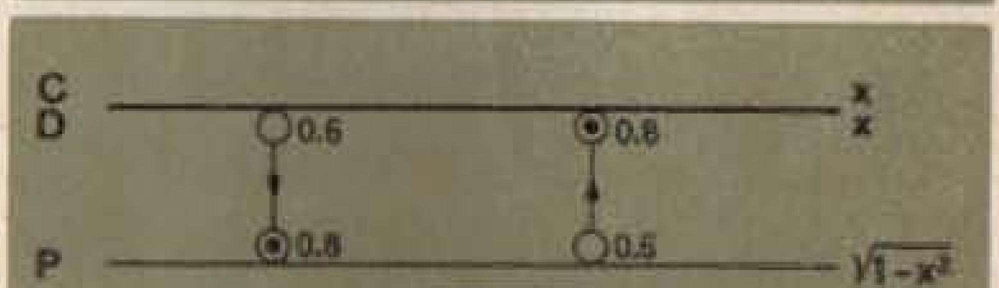


Fig. 29 $\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Convém sempre efectuar as leituras de modo a obter a maior precisão.

Por ex. para $\sqrt{1 - 0{,}15^2} = 0{,}9887$ leu-se o 0,15 na escala D.

Exemplo tirado da electrotecnia:

Carga aparente: 1,0

Potência activa: 0,85

Potência reactiva: $\sqrt{1 - 0{,}85^2} = 0{,}527$.

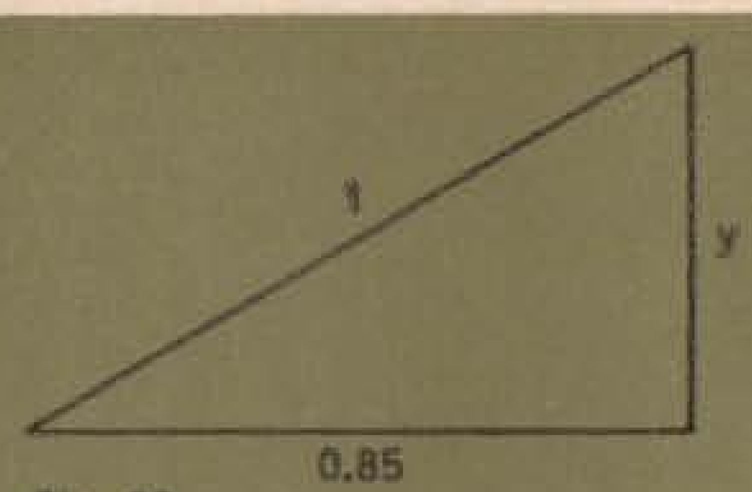


Fig. 30

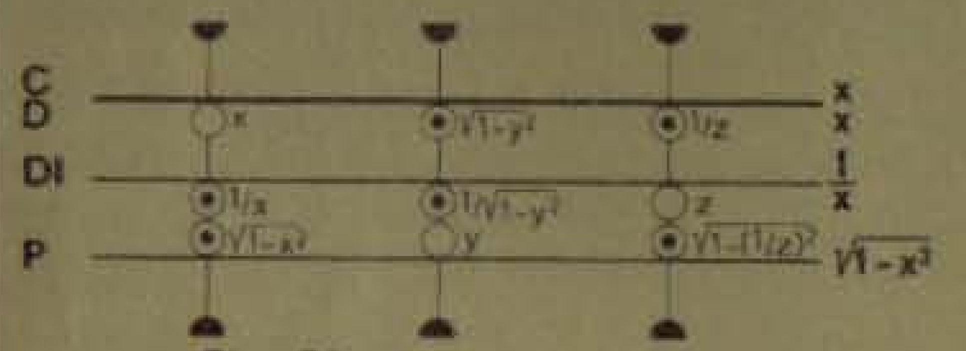


Fig. 31

Este processo de cálculo só é simples quando a hipotenusa é igual a 1 ou 10, 100, etc., que é o caso da transformação seno $\longleftrightarrow$ coseno, segundo $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Utilizando ainda a escala DI, na ARISTO-StudioLog, obtêm-se as relações mútuas indicadas na fig. 31. Para outros triângulos rectângulos resultará melhor a resolução trigonométrica (ver cap. 18).

Isto também serve para o cálculo mais exacto de raízes quadradas, por ex.

$$\sqrt{0{,}91} = \sqrt{1 - 0{,}09} = 0{,}9540$$

0,09 lê-se na parte da esquerda da escala A, o que dá $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$, em D, e o valor $\sqrt{1 - 0{,}3^2} = 0{,}9540$ em P, na outra face da régua.

Até apróximadamente $\sqrt{0{,}65}$ este processo dá maior rigor. Ele é sempre conveniente quando o radicando se aproxima de 0,01, 1, 100, etc.

15. Funções circulares

Todas as funções circulares estão relacionadas com a escala fundamental D e os ângulos são dados em graus, mas com subdivisão decimal.
Lido o valor do ângulo nas escalas S, T1 e T2 tem-se o valor da função circular correspondente na escala D. Inversamente: para cada valor, em D, duma função circular, tem-se, nas escalas S, T1 e T2, o ângulo que lhe corresponde. A numeração das escalas decimais S, T1 e T2 refere-se únicamente aos valores angulares indicados.

Na régua de cálculo só se lêem ângulos do primeiro quadrante. Nos outros casos haverá que utilizar o seguinte quadro, de redução ao primeiro quadrante.

	$\pm\alpha$	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$
sen	$\pm$ sen α	$+\cos\alpha$	$\mp$ sen α	$-\cos\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp$ sen α	$-\cos\alpha$	$\pm$ sen α
tg	$\pm$ tg α	$\mp$ cotg α	$\pm$ tg α	$\mp$ cotg α
cotg	$\pm$ cotg α	$\mp$ tg α	$\pm$ cotg α	$\mp$ tg α

15.1 A escala de senos S

A escala dos senos S abrange os ângulos desde 5,5° até 90°. Para os cosenos lêem-se, em sentido inverso, de 0° a 84,5°, os numeros a vermelho. Os valores dos senos e cosenos, lidos na escala fundamental D, começam por 0, ...
Para o cálculo do seno de ângulos $\alpha > 45°$, é preferível utilizar a relação sen $\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, lendo-se os senos de ângulos na escala P numerada a vermelho; para acertar o ângulo utilizam-se os algarismos vermelhos da escala S. Isto dará maior precisão à leitura final, e daqui uma simples regra de cores para os cálculos de senos: Utilizar sempre escalas da mesma cor.

Anàlogamente para o cos α, sendo $\alpha < 45°$, convém empregar a relação $\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ e a regra de cores: A cada acerto na escala S pertence uma leitura de cor diferente em D ou P.

Exemplos:

$$\text{sen } 26° = 0{,}438$$

$$\text{sen } 82° = \sqrt{1 - \cos^2 82°} = 0{,}9903$$

$$\text{arc sen } 0{,}54 = 32{,}7°$$

$$\cos 75° = 0{,}2588$$

$$\cos 7° = \sqrt{1 - \text{sen}^2 7°} = 0{,}99255$$

$$\text{arc cos } 0{,}9852 = 9{,}87°$$

15.2 A escala de senos na gaveta móvel
(só para 0969)

Na régua ARISTO-StudioLog existe uma escala de senos tanto na parte fixa como na gaveta móvel. A utilização da escala de senos fixa ou móvel depende do problema a resolver. Na multiplicação ou divisão de várias funções, p. e. na trigonometria esférica, utilizam-se, com vantagem, as duas escalas.

A escala S da gaveta móvel oferece igualmente grandes vantagens para operações como $\frac{a}{\text{sen}\,\alpha}$ e $\frac{b}{\cos\beta}$ ou para a aplicação da lei de refracção na óptica

$$\frac{n}{n'} = \frac{\text{sen}\,i'}{\text{sen}\,i}.$$

Exemplos:

1. $$\cos\varphi = \frac{\text{sen } 44{,}3° \cdot \text{sen } 16{,}7°}{\text{sen } 14{,}6°} = 37{,}2°$$

(fig. 34)

2. Partindo dos pontos finais duma linha dada $c = 18{,}6$ m deseja-se calcular a altura trigonométrica h com os ângulos de elevação $\alpha = 28°$ e $\beta = 25°$:

$$h = \frac{c\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\alpha - \beta)}$$

Esta fórmula é transformada para levar ao resultado com um mínimo de acertos:

$$\frac{1}{h} = \frac{\text{sen}\,(\alpha - \beta) \cdot 1/c}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

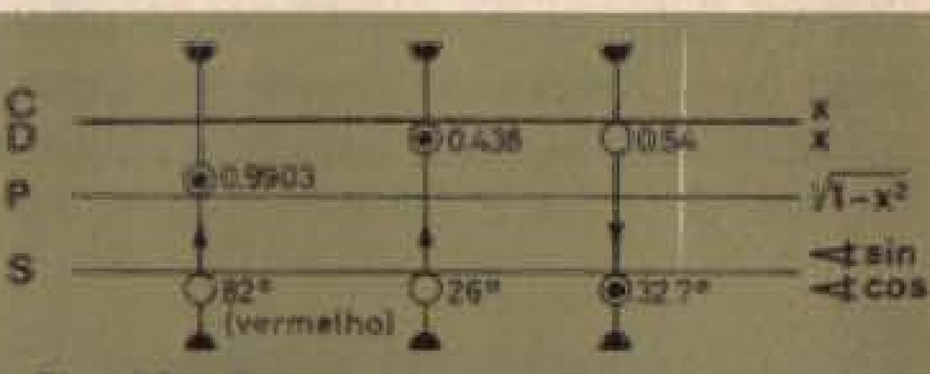


Fig. 32 Senos

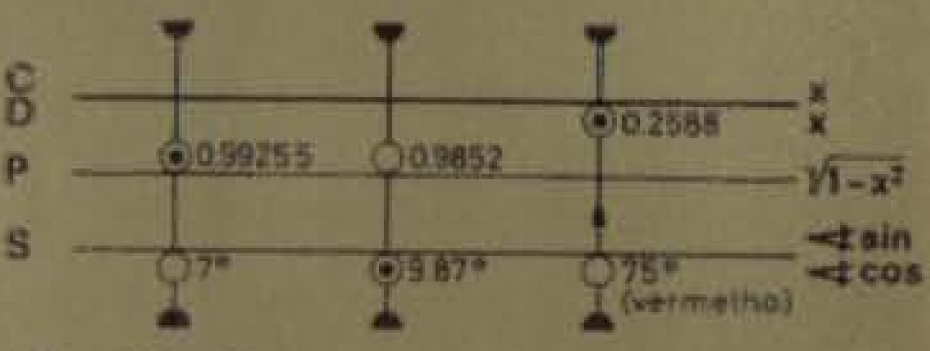


Fig. 33 Cosenos

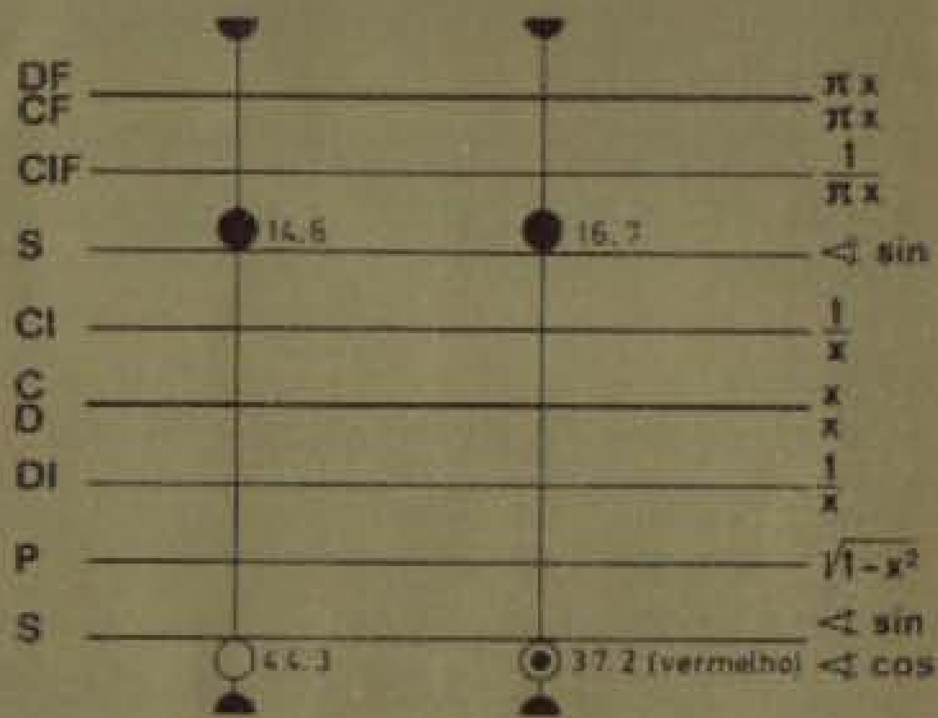


Fig. 34

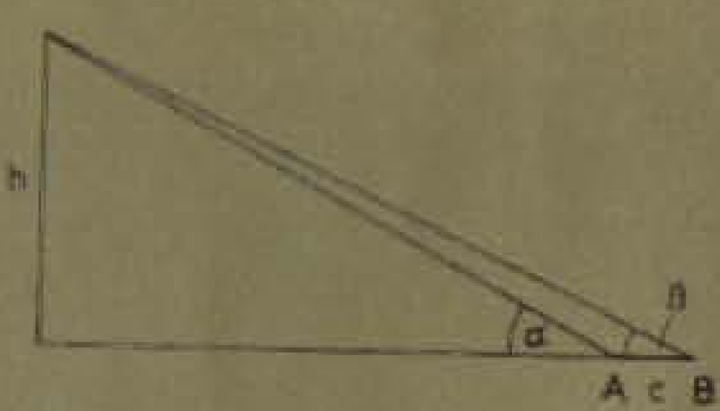


Fig. 35

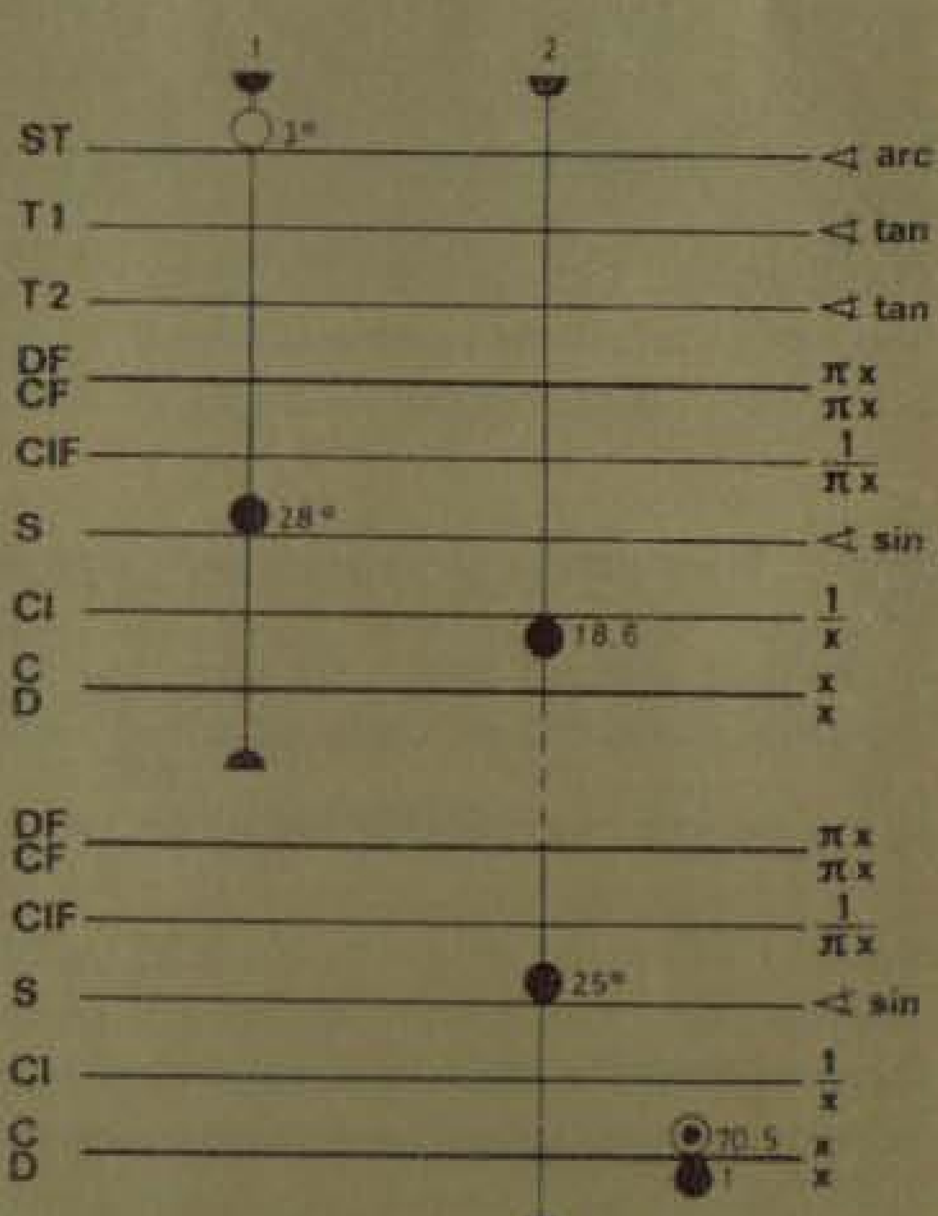


Fig. 36

Com a ajuda do cursor faz-se coincidir 3° em ST com 28° em S. Desloca-se o cursor para 18,6 em CI, deslocando em seguida a gaveta até fazer coincidir 25° em S com o traço do cursor. Obtém-se o resultado h = 70,5 m em C (acima de 1 em D) ou em DI (por baixo de 1 em C).

15.3 As escalas de tangentes T1 e T2

A escala de tangentes é de dois troços. T1 vai de 5,5° a 45° e T2 de 45° a 84,5°. Para os ângulos marcados nas escalas de tangentes, as funções lêem-se em D. Para T1 situam-se entre 0,1 e 1,0, para T2 entre 1,0 e 10,0.

Para os valores das cotangentes emprega-se a fórmula $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, lendo para todos os ângulos o valor das suas cotangentes na escala dos inversos CI.

No caso da ARISTO-StudioLog lêem-se os valores das cotangentes na escala de inversos DI.

Para os ângulos marcados em T1 os valores das cotangentes vão de 1,0 a 10,0; para T2 de 0,1 a 1,0.

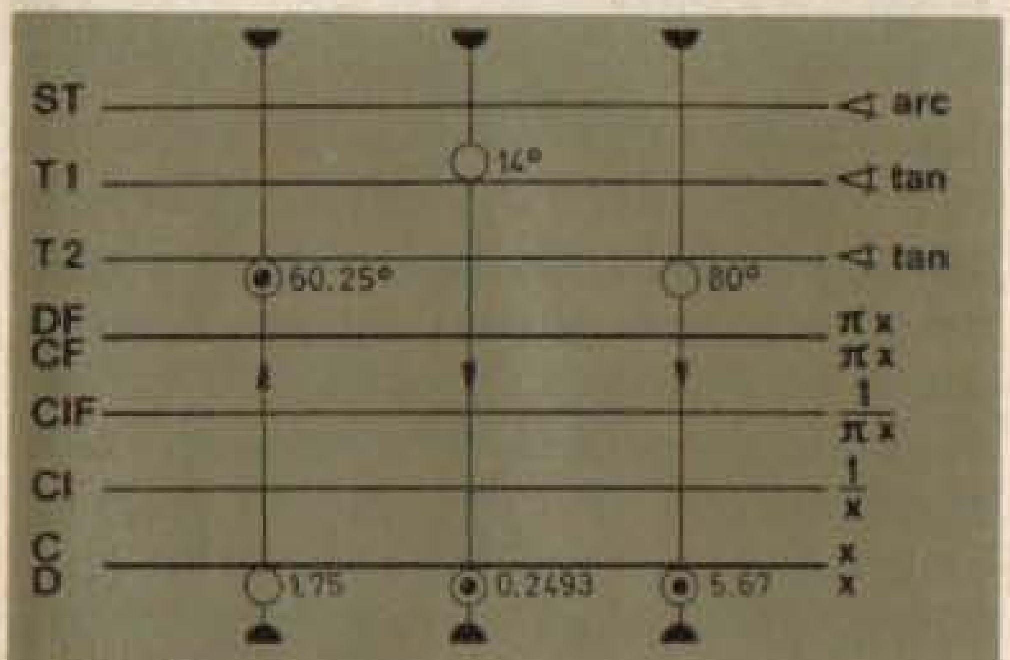


Fig. 37 Tangentes

Exemplos:

tg	14°	=	0,2493
tg	23,6°	=	0,437
tg	41,1°	=	0,872
tg	51,2°	=	1,244
tg	73,4°	=	3,35
tg	80°	=	5,67
arc tg	1,75	=	60,25°
arc tg	2,0	=	63,43°
cotg	9°	=	6,31
cotg	23,6°	=	2,289
cotg	41,1°	=	1,146
cotg	51,2°	=	0,804
cotg	73,4°	=	0,298
cotg	77°	=	0,2309
arc cotg	2,0	=	26,57°
arc cotg	1,75	=	29,74°

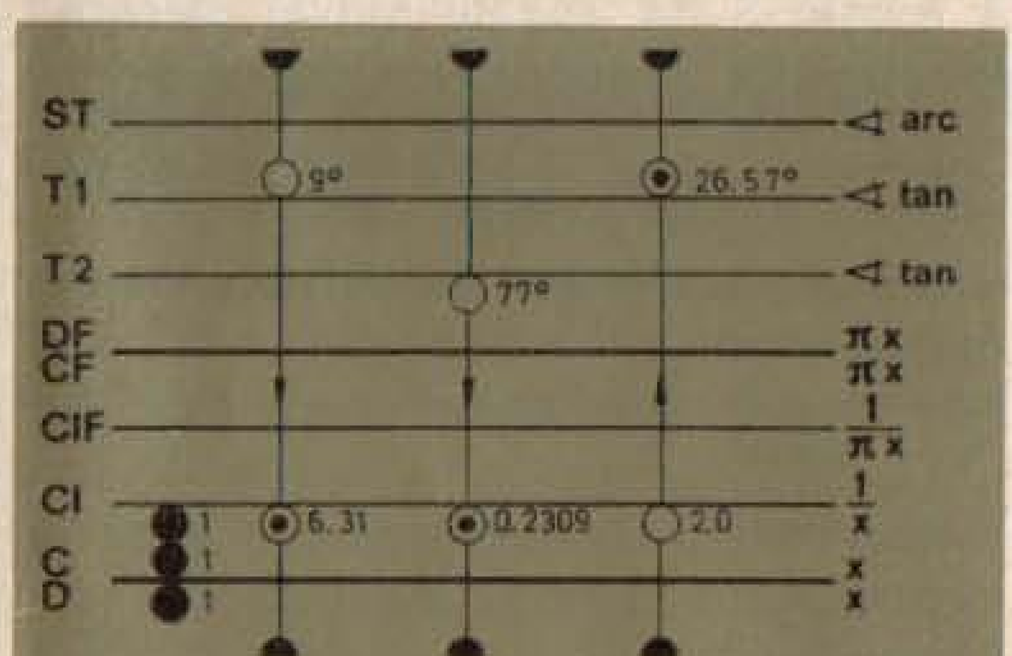


Fig. 38 Cotangentes

16. A escala ST

Esta escala é uma continuação das escalas S e T para ângulos, cujas funções lidas em D se situam entre 0,01 e 0,1. Ao mesmo tempo tem a particular vantagem de permitir a conversão de graus em radianos, ao passar de ST a D.

16.1 Pequenos ângulos — grandes ângulos

Quando se deseja sen α ou tg α para $\alpha < 5{,}5°$ (bem como cos α ou cotg α para $\alpha > 84{,}5°$) podem-se usar as fórmulas aproximadas:

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \cos (90° - \alpha) \approx \operatorname{cotg} (90° - \alpha) \approx \operatorname{arc} \alpha \approx \frac{\pi}{180} \alpha \approx 0{,}01745\, \alpha$$

A escala ST, para ângulos de 0,55° a 6°, corresponde aos valores desses ângulos medidos em radianos, os quais se obtêm por comparação com a escala D. Isto também dá, pelo que acima se viu, os valores dos senos e tangentes destes pequenos ângulos. A numeração vermelha da escala ST, em sentido contrário, de 84° a 89,45°, serve para os valores correspondentes dos cosenos e das cotangentes.

A coincidência entre sen α, tg α e arc α é muito boa até aos 4°; p. e. sen 4° = 0,0698, tg 4° = 0,0699 e arc 4° = 0,0698. Para ângulos maiores entre 4° e 6° utilizar-se-á, para maior rigor, as fórmulas

$$\text{sen}\,\alpha \approx \alpha \frac{\text{sen}\,6°}{6°}, \qquad \text{tg}\,\alpha \approx \alpha \frac{\text{tg}\,6°}{6°}$$

Exemplos:

$$\text{sen}\,4{,}7° = 4{,}7° \cdot \frac{\text{sen}\,6°}{6°} = 0{,}0819$$

$$\text{sen}\,5{,}3° = 5{,}3° \cdot \frac{\text{sen}\,6°}{6°} = 0{,}0924$$

$$\text{tg}\;\;4{,}7° = 4{,}7° \cdot \frac{\text{tg}\,6°}{6°} = 0{,}0822$$

$$\text{tg}\;\;5{,}3° = 5{,}3° \cdot \frac{\text{tg}\,6°}{6°} = 0{,}0928$$

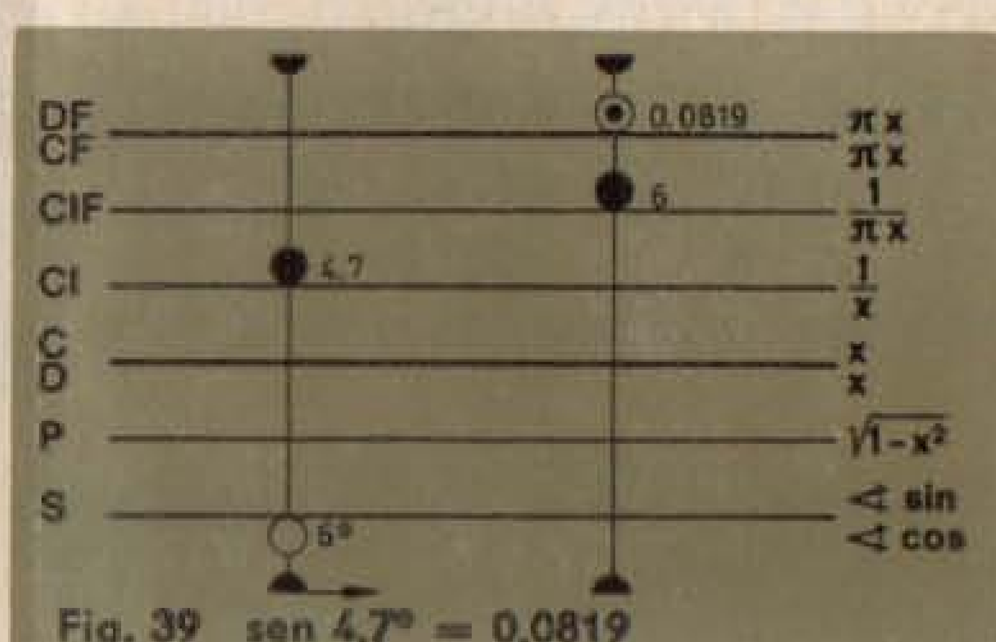


Fig. 39 sen 4,7° = 0,0819

Para o cálculo dos exemplos acima indicados o problema é transformado:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,6°}{\frac{1}{\alpha}\cdot 6°} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,6°}{\frac{1}{\alpha}\cdot 6°}$$

Com a ajuda do cursor fazem-se coincidir sen 6° em S, ou tg 6° em T, com o valor de α em CI. Depois desloca-se o cursor para 6 em CIF e lê-se o resultado bor baixo do traço em DF.

Os valores de cos α para $\alpha < 5{,}7°$ e de sen α para $\alpha > 84{,}3°$ não se podem ler na régua com bastante precisão. Convém recorrer à fórmula

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \text{ (em radianos)}$$

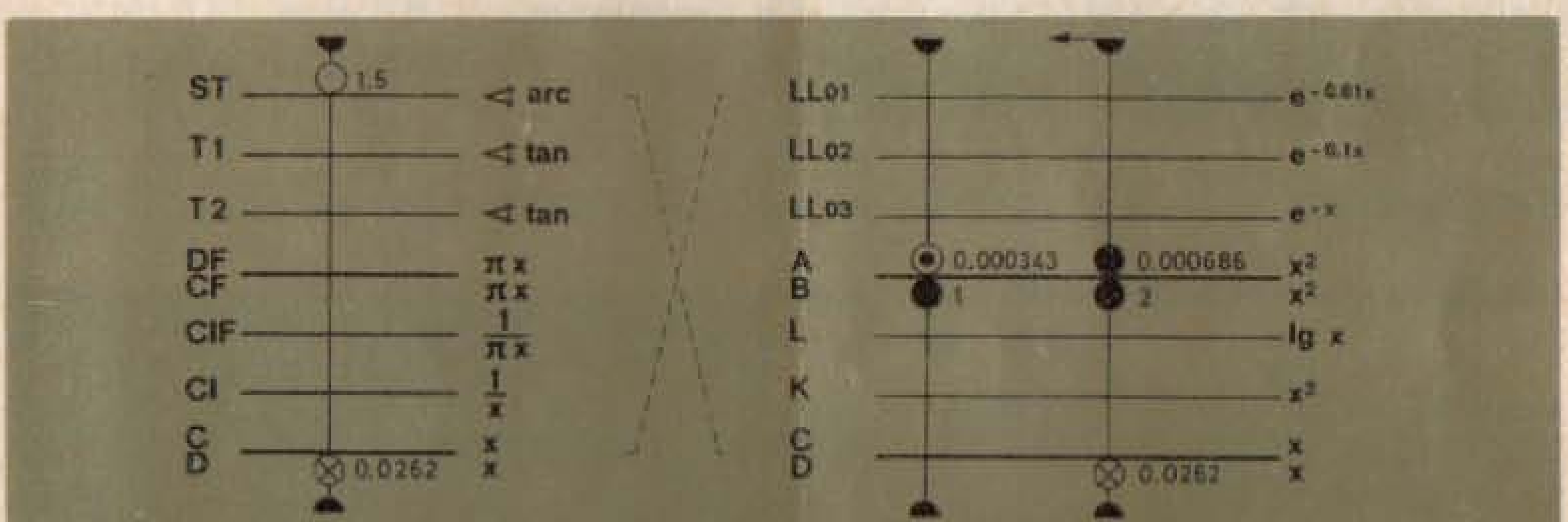


Fig. 40

Exemplo: $\cos 1{,}5° = 1 - \frac{0{,}0262^2}{2} = 0{,}999657$ (fig. 40)

Para calcular o segundo membro da série, marca-se o ângulo 1,5 em ST com o cursor. Debaixo do traço em D encontra-se o valor do ângulo em radianos, e em A o seu quadrado 0,000686. Para dividir coloca-se o 2 de B sob o cursor e lê-se o resultado 0,000343 em A. Finalmente subtrai-se 1 − 0,000343 = 0,999657.

$$\text{sen}\,86{,}5° = \cos 3{,}5° = 1 - \frac{0{,}0611^2}{2} = 0{,}99813$$

16.2 Conversão de graus em radianos

A conversão de graus em radianos obtêm-se só com um movimento do cursor, visto a escala ST ser igual à escala fundamental D deslocada de $\pi/180$ em relação a ela. Assim, ao passar de ST a D, transformam-se graus em radianos. E, inversamente, com uma passagem em sentido contrário. Isto dá-se, não só para os ângulos da escala ST, como para todos os ângulos, graças à subdivisião decimal dos graus, a qual permite ler 0,1°, 1°, 10° etc. onde está o 1, sendo a vírgula colocada igualmente na leitura dos radianos (fig. 41). O 1 da escala ST é a marca para a leitura de $\pi/180$.

p. e. a) $0{,}1° = 0{,}001\,745$ rad
b) $10° = 0{,}1745$ rad
c) $5° = 0{,}087\,25$ rad
d) $0{,}5° = 0{,}008\,725$ rad

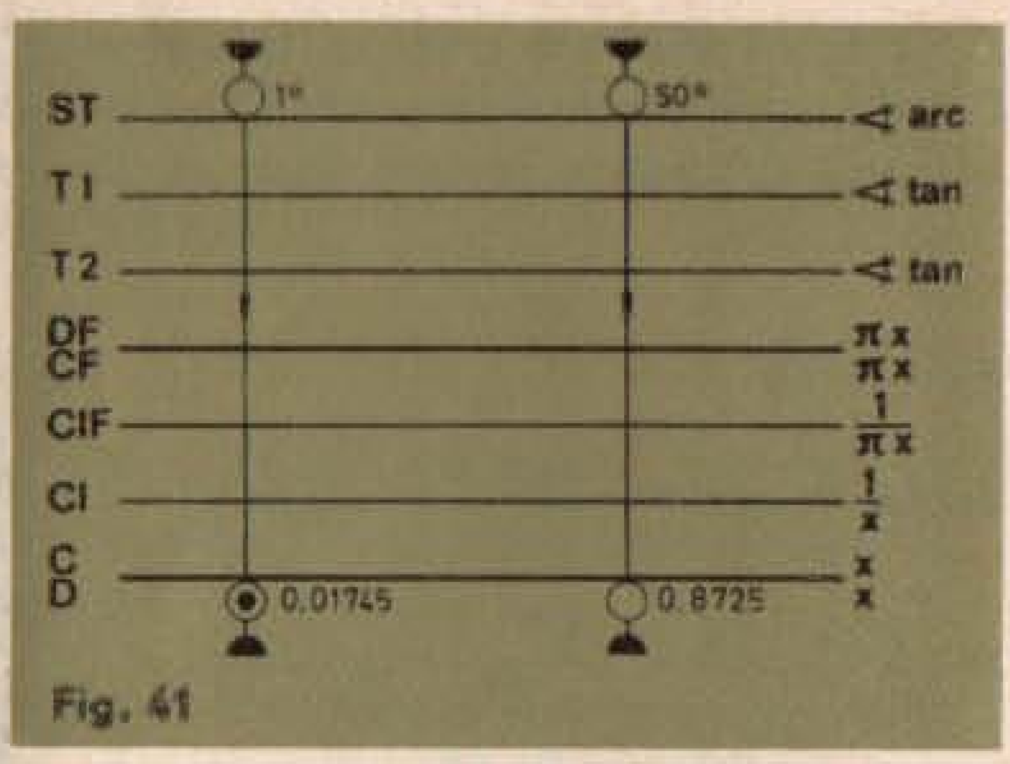


Fig. 41

Pequenos ângulos dados em minutos ou segundos são transformados em valores decimais de grau: $1' = 1/60°$ e $1'' = 1/3600°$ (ver também os capítulos 16.3 e 21.1).

Colocando o 6 ou o 36 da escala CF debaixo do 1° da escala ST obtem-se uma «tabela gráfica» muito cómoda para estas conversões.

16.3 Os índices ϱ' e ϱ''

Os índices ϱ' e ϱ'' da escala C da gaveta facilitam as conversões, para radianos, quando os pequenos ângulos forem dados em minutos e segundos de grau. Os seus valores são respectivamente:

$$\varrho' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \quad \text{para minutos}$$

$$\varrho'' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206\,265 \quad \text{para segundos}$$

Com eles basta uma divisão para fazer a conversão:

$$\text{arc}\ \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

Exemplos:

$$\text{arc}\ 22' = \frac{22'}{\varrho'} = 0{,}00640$$

$$\text{arc}\ 400' = \frac{400'}{\varrho'} = 0{,}1163 \text{ rad}$$

$$\text{arc}\ 17'' = \frac{17''}{\varrho''} = 0{,}0000824 \text{ rad}$$

$$\text{arc}\ 380'' = \frac{380''}{\varrho''} = 0{,}001843 \text{ rad}$$

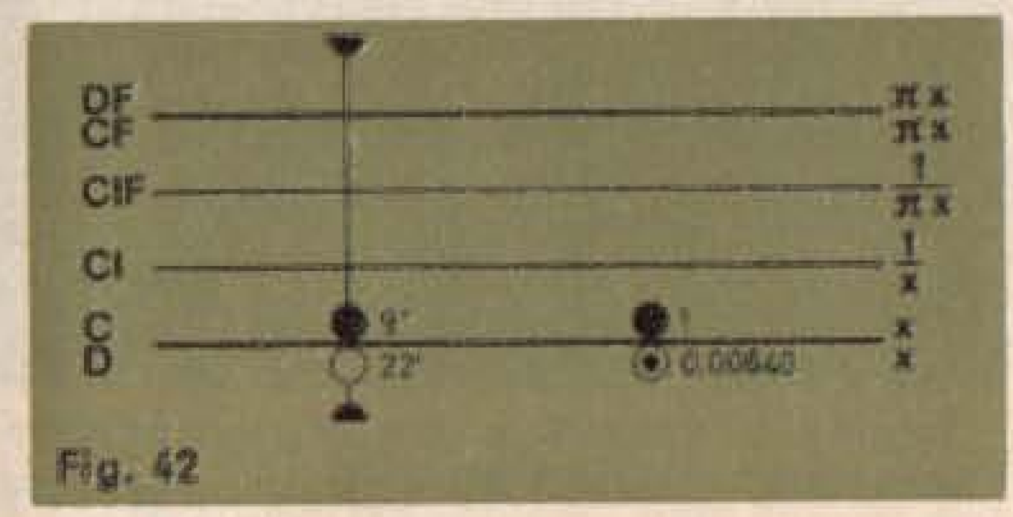


Fig. 42

Com estes índices ϱ o cálculo dos pequenos ângulos ou dos arcos torna-se bastante mais simples.

$$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \varrho \quad \text{se se quer o ângulo}$$

$$b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho} \quad \text{se se quer o arco}$$

Exemplos:

$$\alpha = \frac{0{,}6}{45} \cdot \varrho' = 45{,}8'$$

$$b = \frac{48'' \cdot 67}{\varrho''} = 0{,}0156$$

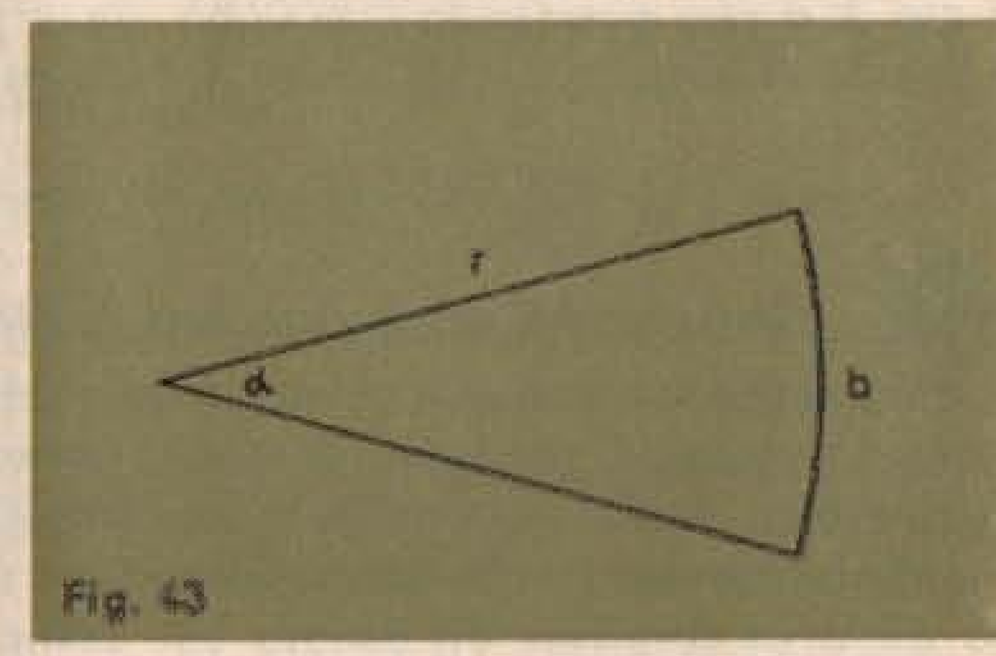


Fig. 43

17. A ARISTO-Studio 400^g

As escalas trigonométricas S, T e ST da ARISTO-Studio 0968/400^g estão marcadas em grados. O cálculo com as escalas dos ângulos efectua-se da mesma maneira conforme descrito nos capítulos 15 a 16.3. Os exemplos indicados modificam-se na medida que o ângulo recto corresponde a 100^g. Para o cálculo das co-funções observe-se:

$$\cos\alpha = \text{sen}\,(100^g - \alpha)$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \text{tg}\,(100^g - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Segue-se o cálculo dos exemplos dos capítulos 15.1 a 16.3 para a graduação de 400^g:

17.1

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,26^g &= 0{,}397\\
\text{sen}\,82^g &= \sqrt{1-\cos^2 82^g} = 0{,}9063\\
\text{arcsen}\,0{,}54 &= 36{,}3^g\\
\cos 75^g &= 0{,}383\\
\cos 7^g &= \sqrt{1-\text{sen}^2\,7^g} = 0{,}99396\\
\text{arccos}\,0{,}9852 &= 10{,}97^g
\end{aligned}$$

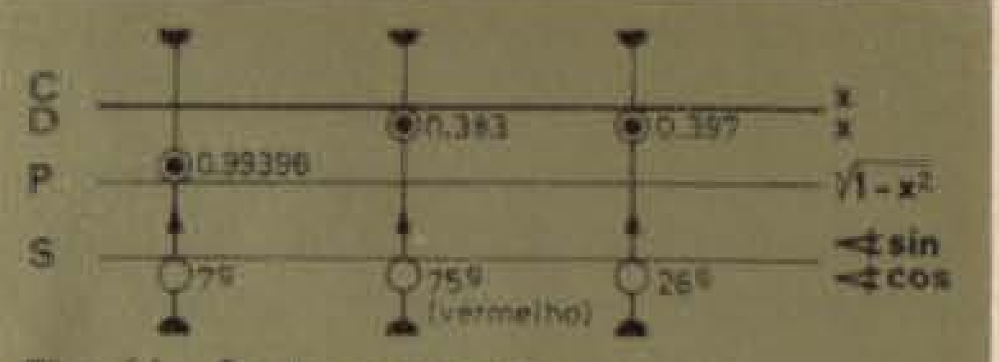


Fig. 44 Senus e cosenos

17.2

$$\begin{aligned}
\text{tg}\,14^g &= 0{,}2235\\
\text{tg}\,80^g &= 3{,}078\\
\text{tg}\,85^g &= 4{,}17\\
\text{arctg}\,1{,}75 &= 66{,}95^g\\
\text{cotg}\,77^g &= 0{,}378\\
\text{arccotg}\,2{,}0 &= 87{,}44^g
\end{aligned}$$

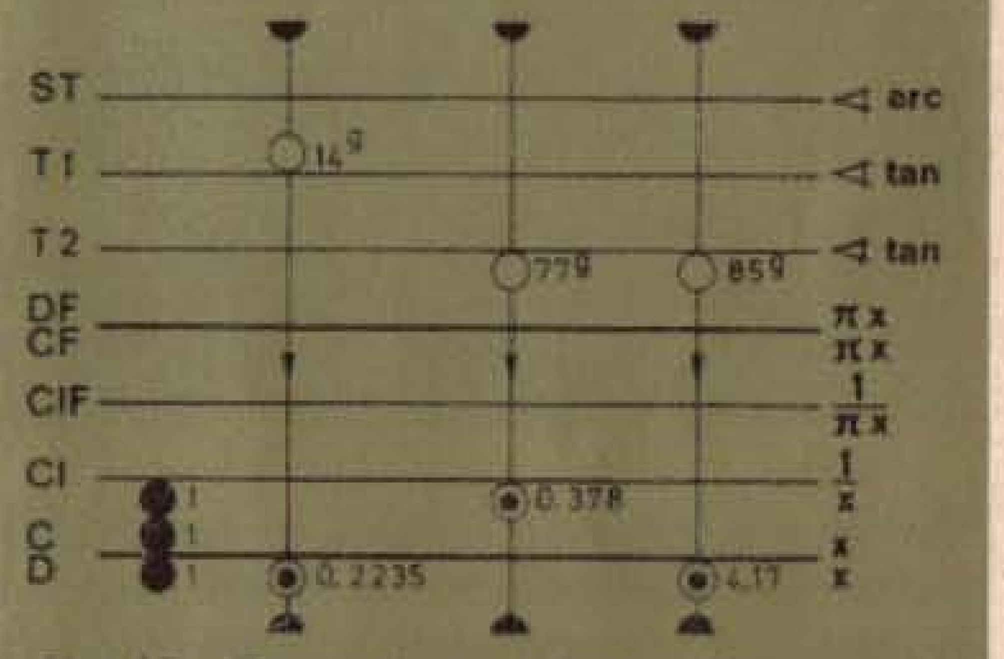


Fig. 45 Tangentes e cotangentes

17.3

$$\text{sen}\,\alpha \approx \text{tg}\,\alpha \approx \cos(100^g-\alpha) \approx \text{cotg}\,(100^g-\alpha) \approx \frac{\pi}{200^g}\alpha^g = 0{,}01571\,\alpha$$

Para ângulos grandes de sen e ângulos pequenos de cos encontra-se a aproximação com o princípio dum desenvolvimento em série.

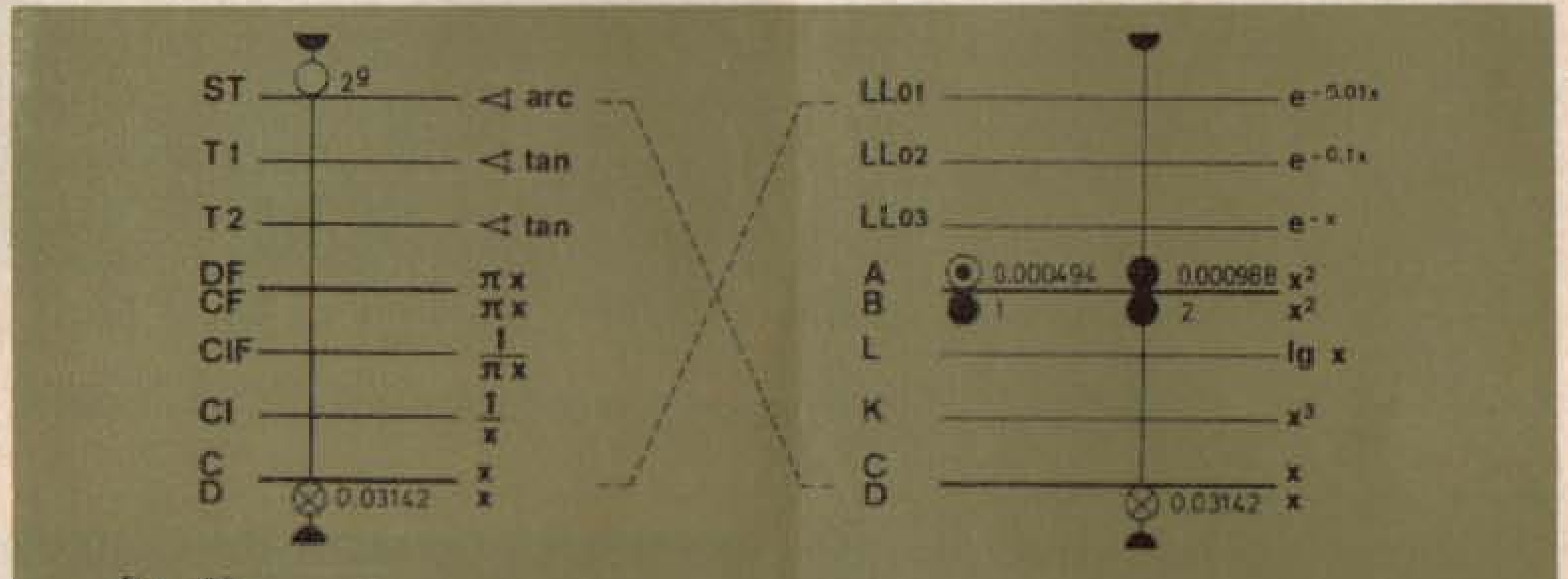


Fig. 46

Exemplos:

$$\cos 2^g = 1 - \frac{0{,}03142^2}{2} = 1 - 0{,}000494 = 0{,}999506 \quad \text{(fig. 46)}$$

$$\text{sen}\,95^g = \cos 5^g = 1 - \frac{0{,}0786^2}{2} = 1 - 0{,}00308 = 0{,}99692$$

17.4 A escala ST da ARISTO-Studio 400^g é uma escala fundamental transposta de $\frac{\pi}{200}$. O 1 desta escala é a marca para a leitura de $\frac{\pi}{200}$.

a) $0{,}1^g = 0{,}001571$ rad b) $10^g = 0{,}1571$ rad
c) $0{,}5^g = 0{,}007854$ rad d) $5^g = 0{,}07854$ rad

17.5 A sequência dos números da marca ϱ é igual para grados, minutos e segundos em consequência da subdivisão decimal dos grados:

$$\varrho^g = 63{,}66 = \frac{200}{\pi}$$
$$\varrho^c = 6366$$
$$\varrho^{cc} = 636600$$

18. Resolução trigonométrica de triângulos planos

A disponibilidade das funções trigonométricas não é a única vantagem das escalas trigonométricas. Mais importante é que permitem a sua utilização sem necessidade duma leitura.

A chamada fórmula dos senos fornece um exemplo típico das vantagens da régua de cálculo na resolução de proporções

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

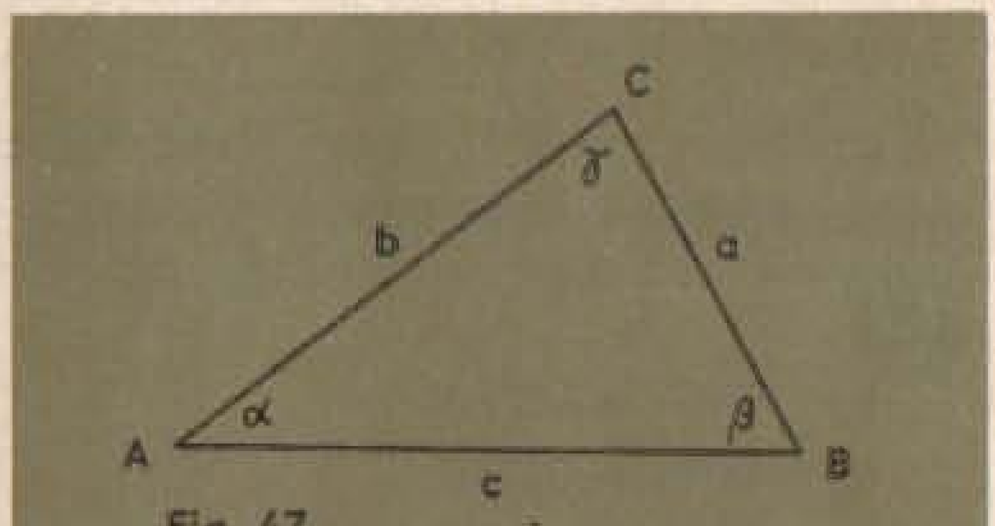


Fig. 47

Basta acertar uma leitura de um ângulo, feita na escala S, com a do lado oposto, feita na escala C, para se corresponderem devidamente os restantes lados e ângulos, o que permite a determinação dos que se desejam.

Na prática o caso mais frequente é o dos triângulos rectângulos. Sendo então $\gamma = 90°$ será $\text{sen}\,\gamma = 1$, $\alpha = 90° - \beta$ e $\beta = 90° - \alpha$ o que dá:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{1} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

além disso é $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

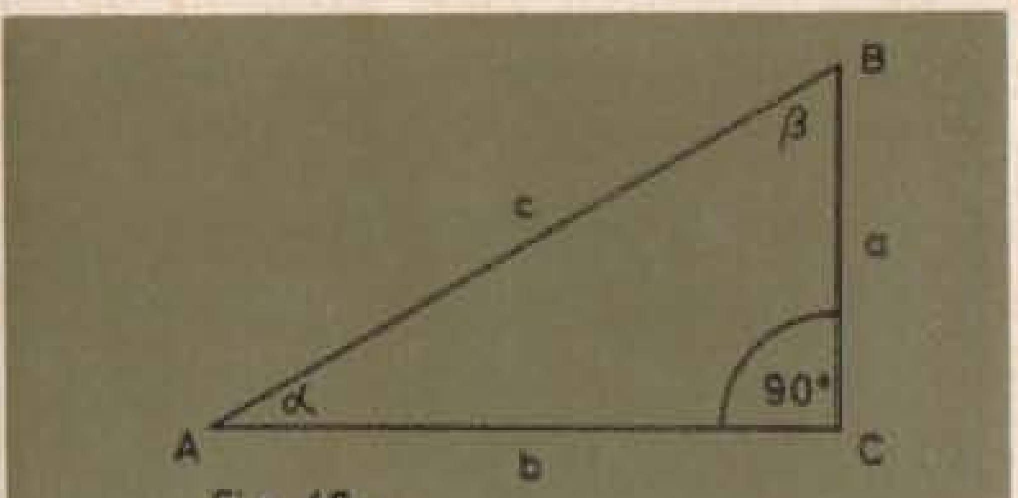


Fig. 48

Podem aparecer dois modos diferentes de operar conforme os dados forem:

1. dois elementos quaisquer, que não sejam (simultâneamente) os dois catetos.
2. Os dois catetos (a e b).

Exemplo para 1:

dados: $c = 5$, $a = 3$

incógnitas: α, β, b

sabe-se que: $\beta = 90° - \alpha$

$$\frac{c}{1} = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

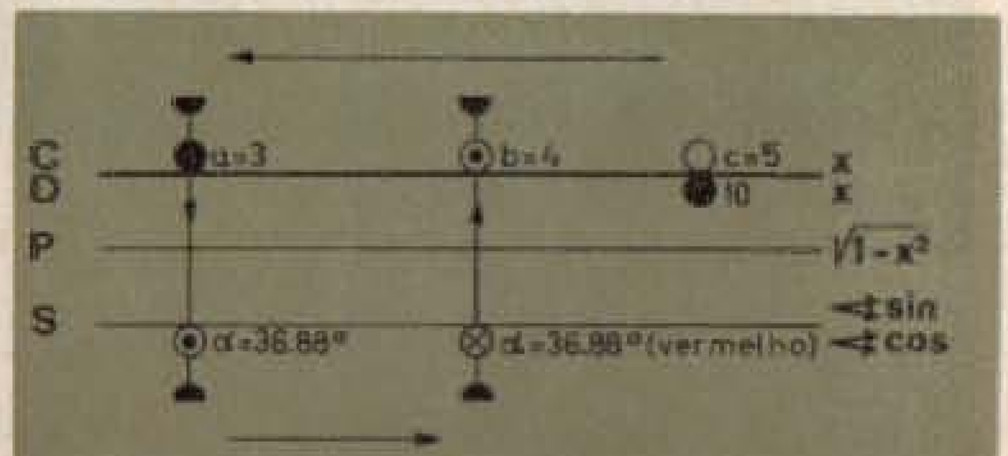


Fig. 49 Conhecida a hipotenusa

Começa-se por ler a hipotenusa 5 em C acima do 1 da escala D (em substituição de sen 90°); em correspondência com o cateto 3 lido em C, tem-se em S o ângulo correspondente $\alpha = 36{,}88°$. Deixando a gaveta na mesma posição, desloca-se o cursor até 36,88° da numeração vermelha em S, podendo agora ler em C o lado oposto a β: $b = 4$.

Análogamente se procederá quando os dados forem um cateto (a) e um ângulo (α). Acerta-se o cateto (a) com o seno do ângulo oposto (α), lidos em C e S respectivamente, tendo-se a hipotenusa (c) naquela primeira escala, por cima de uma extremidade da escala D.

Ás vezes é preferível usar a escala CF, em vez de C, para evitar «translações» da gaveta.

Exemplo para 2:

dados: $a = 3$, $b = 6$

procura-se: α, β, c

$$\operatorname{tg}\alpha = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = a \cdot \frac{1}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 3 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha < 1$$

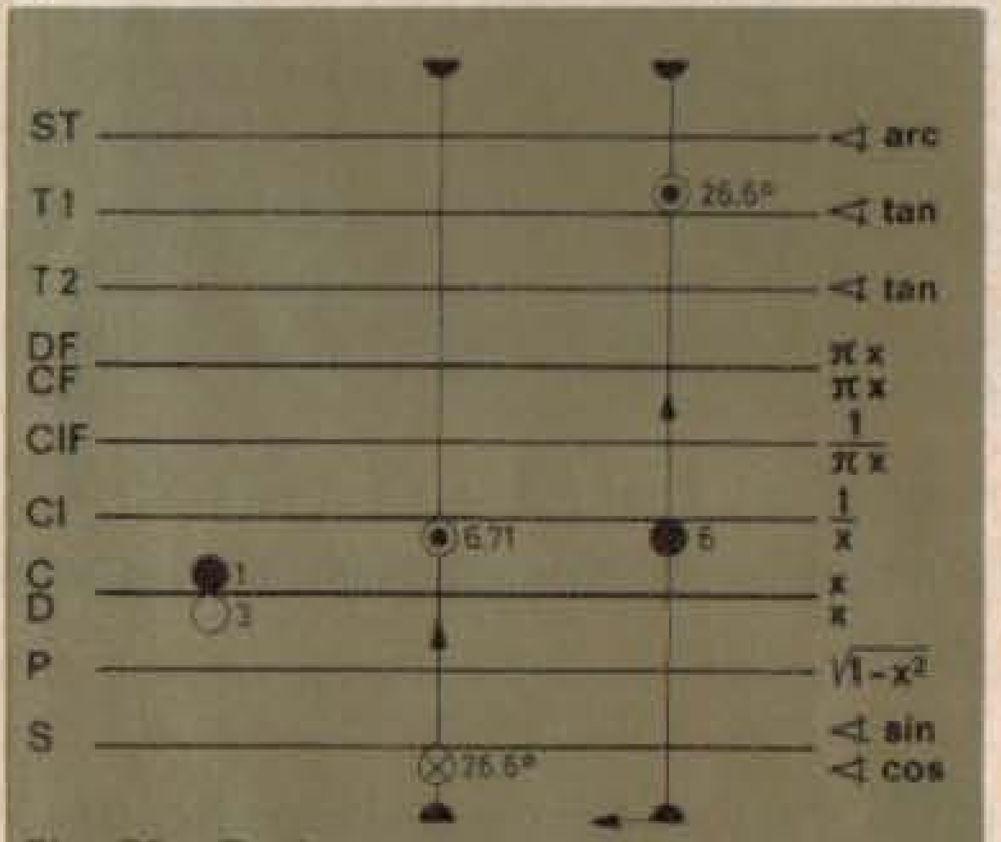


Fig. 50 Dados os catetos

Acertamos o 1 de C com o cateto mais pequeno 3, para encontrar $\alpha = 26{,}6°$ em T1, em correspondência com o 6 de escala CI. Colocando-se, com a mesma posição de gaveta, o traço do cursor sobre 26,6° em S, lê-se o resultado $c = 6{,}71$ em escala CI, pois sendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ obtemos a proporção $\frac{a}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1/c} \cdot \beta = 90° - 26{,}6° = 63{,}4°$. Quando fôr $a > b$, donde $\alpha > 45°$, o ângulo não é lido em T1 mas em T2. O restante processo de cálculo é o mesmo como no exemplo anterior.

Exemplo para 2:

dados: $a = 2$ $b = 4{,}5$

procura-se: α, β, c

Dando-se, no cálculo de triângulos rectângulos, sempre a designação «a» ao cateto mais pequeno, encontram-se os restantes elementos com a seguinte proporção:

$$\frac{1}{1/a} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1/b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1/c}$$

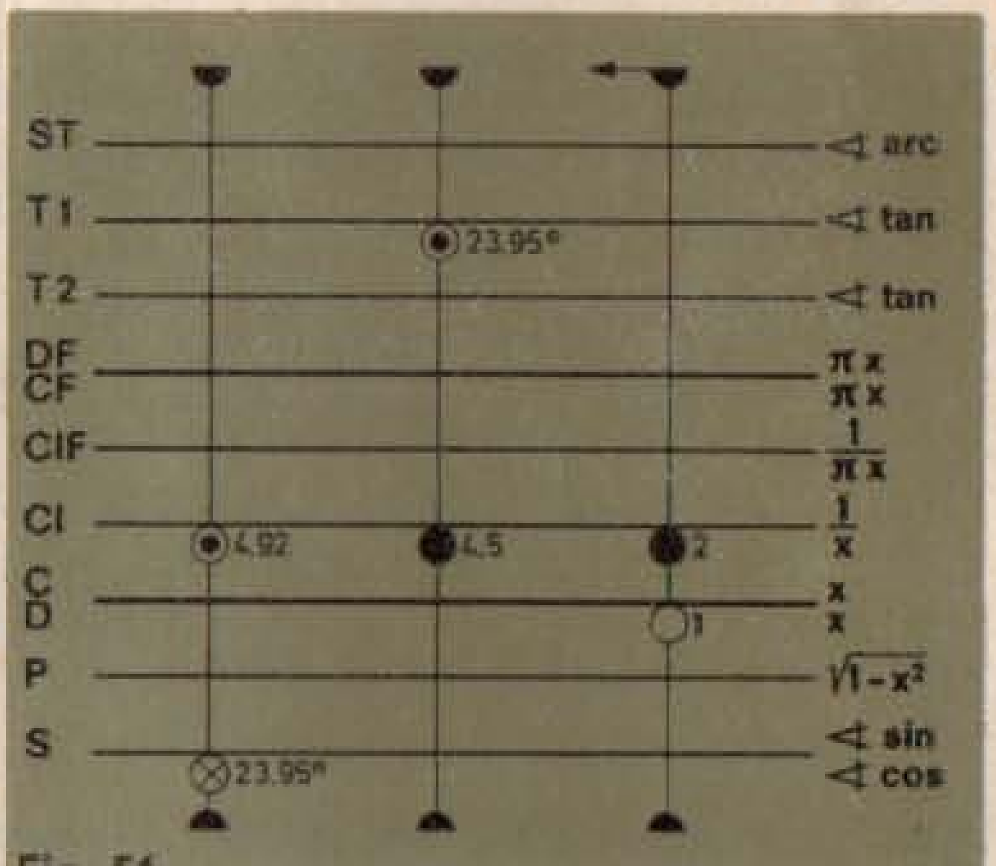


Fig. 51

O cateto mais pequeno $a = 2$ em CI é colocado acima do 1 direito da escala D. Acima de $b = 4{,}5$ em CI, lê-se em T1 $\alpha = 23{,}95$º. Em seguida o traço do cursor é acertado sobre $\operatorname{sen}\alpha = 23{,}95°$ em S, para a leitura da hipotenusa $c = 4{,}92$ em CI. $\beta = 90° - 23{,}95° = 66{,}05°$.

18.1 Os números complexos

Estes dois tipos de cálculo, indicados para os triângulos rectângulos, têm uma importância especial nos cálculos de coordenadas e de vectores, bem como no de números complexos, por aí aparecerem conversões de coordenadas rectangulares a polares, e inversamente.

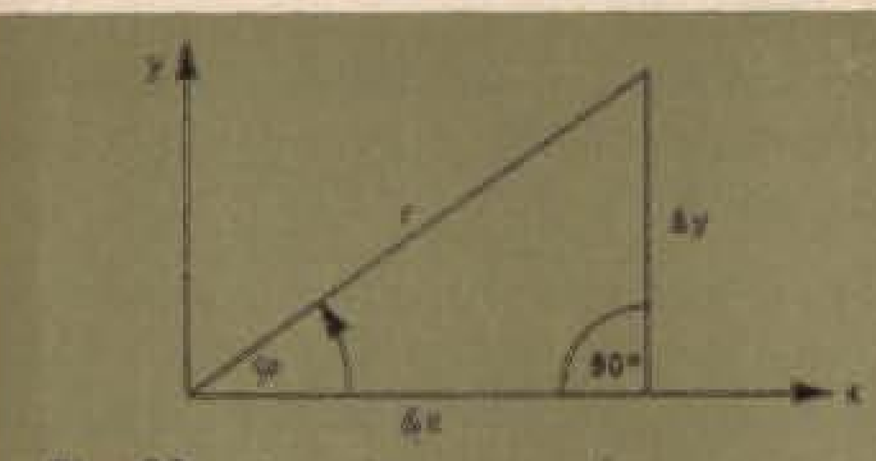


Fig. 52 $\Delta x, \Delta y \longleftrightarrow r, \underline{/\varphi}$

Os números complexos dados sob a forma $Z = a + i\,b$ podem ser fàcilmente somados ou subtraídos; porém é sob a forma de vectores $Z = r \cdot e^{i\varphi} = r\underline{/\varphi}$ que melhor se podem multiplicar, dividir ou elevar a qualquer potência. Por isso são frequentes as conversões de uma forma na outra.

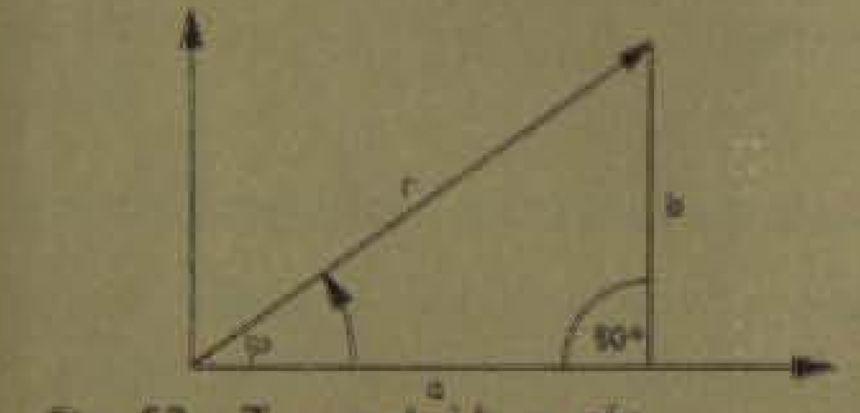


Fig. 53 $Z = a + i\,b = r\underline{/\varphi}$

Exemplos: $Z = 4{,}5 + i\,1{,}3 = 4{,}68\underline{/16{,}13°}$ $\quad Z = 6{,}7\underline{/49°} = 4{,}39 + i\,5{,}05$

O processo de cálculo, a utilizar, resulta das explicações anteriores, e da fig. 53.

19. As escalas exponenciais

As escalas exponenciais têm graduação bilogarítmica e são utilizadas em correspondência com as escalas fundamentais C e D. Na ARISTO-Studio a sua amplitude vai de 10^{-5} a 10^{+5} sendo divididas em seis troços. As três escalas e^{-x} (LL0) vão de 10^{-5} a 0,99; as três escalas e^{x} (LL) vão de 1,01 a 10^{5}. A ARISTO-StudioLog possue quatro escalas e^{-x} (LL00, LL01, LL02, LL03) que vão de 10^{-5} a 0,999 e quatro escalas e^{x} (LL0, LL1, LL2, LL3) que vão de 1,001 a 10^{5}.

Nestas escalas lêem-se os números tal como lá estão; não se pode mudar a vírgula. Quer dizer: 1,35 será sempre 1,35 e nunca 13,5 ou 135, como acontece com as escalas fundamentais.

As escalas LL e LL0 são, cada uma delas, uma escala de inversos em relação à outra. Com o seu uso determinam-se os inversos de números < 2,5 com uma precisão maior da das escalas CI ou CIF.

$$\text{Exemplo:} \qquad \frac{1}{1{,}0170} = 0{,}98328$$

Graças às escalas exponenciais calculam-se potências e extraiem-se raízes como adição ou subtração gráfica de segmentos. Dentro da amplitude calculam-se todas as potências, todas as raízes e todos os logaritmos.

19.1 Potências e raízes de expoente ou índice 10 e 100

As escalas exponenciais, do mesmo género, estão dispostas de tal modo que ao passar de uma escala LL a uma adjacente, se obtem a 10^{a} potência ou a raiz de índice 10, segundo o sentido seguido. As variações que daí resultam mostram-se bem na fig. 54 e seus exemplos para um acerto do cursor sobre o valor 1,015 em LL1.

Exemplos: Leitura nas escalas

$1{,}015^{0,1}$	$= \sqrt[10]{1{,}015} = 1{,}00149$	LL0
$1{,}015^{1}$	$= 1{,}015$	LL1
$1{,}015^{10}$	$= 1{,}1605$	LL2
$1{,}015^{100}$	$= 4{,}43$	LL3
$\dfrac{1}{1{,}015^{100}}$	$= 1{,}015^{-100} = 0{,}2257$	LL03
$\dfrac{1}{1{,}015^{10}}$	$= 1{,}015^{-10} = 0{,}8617$	LL02
$\dfrac{1}{1{,}015^{1}}$	$= 1{,}015^{-1} = 0{,}98522$	LL01
$\dfrac{1}{1{,}015^{0,1}}$	$= \dfrac{1}{\sqrt[10]{1{,}015}} = 0{,}99851$	LL00

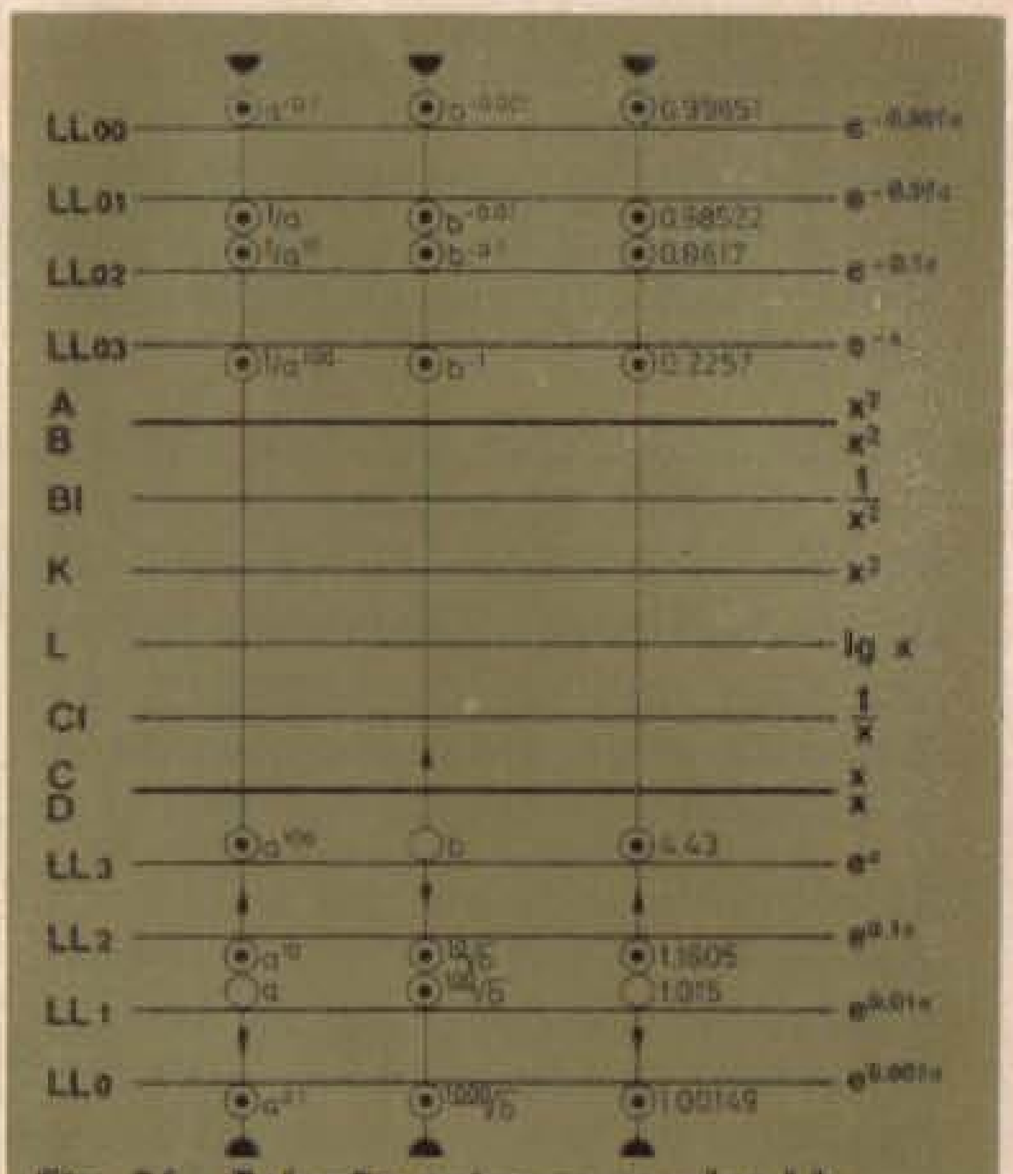


Fig. 54 Relação entre as escalas LL

Variações de leitura dentro da mesma série da fig. 54:

$\sqrt[10]{4{,}43} = 1{,}1605 \quad \sqrt[100]{0{,}2257} = 0{,}98522 \quad 0{,}98522^{10} = 0{,}8617 \quad 1{,}00149^{1000} = 4{,}43$

Estes exemplos, embora raros na prática, servem para melhor se compreender a formação das escalas exponenciais.

19.2 Potências $y = a^x$

Calculam-se potências, com as escalas LL, da mesma maneira como se multiplica com as escalas fundamentais.

Processo de cálculo:

a) Com a ajuda do cursor, colocar o início ou o final da escala C em coincidência com a base «a», lida na correspondente escala LL.
b) Deslocar o cursor até o seu traço coincidir com o expoente x, na escala C.
c) Ler a potência y com o mesmo traço, na devida escala LL (vejam-se as regras para a leitura).

Com o primeiro acerto a) pode-se fàcilmente estudar a variação da função $y = a^x$. A fig. 55 corresponde à função $y = 3{,}2^x$, estando o cursor disposto para o expoente 2,5 e suas variações decimais.

Exemplos: Leitura nas escalas

$3{,}2^{2,5}$	$= 18{,}3$	LL3
$3{,}2^{0,25}$	$= 1{,}338$	LL2
$3{,}2^{0,025}$	$= 1{,}02956$	LL1
$3{,}2^{0,0025}$	$= 1{,}002912$	LL0
$3{,}2^{-2,5}$	$= 0{,}0546$	LL03
$3{,}2^{-0,25}$	$= 0{,}7476$	LL02
$3{,}2^{-0,025}$	$= 0{,}97134$	LL01
$3{,}2^{-0,0025}$	$= 0{,}997096$	LL00

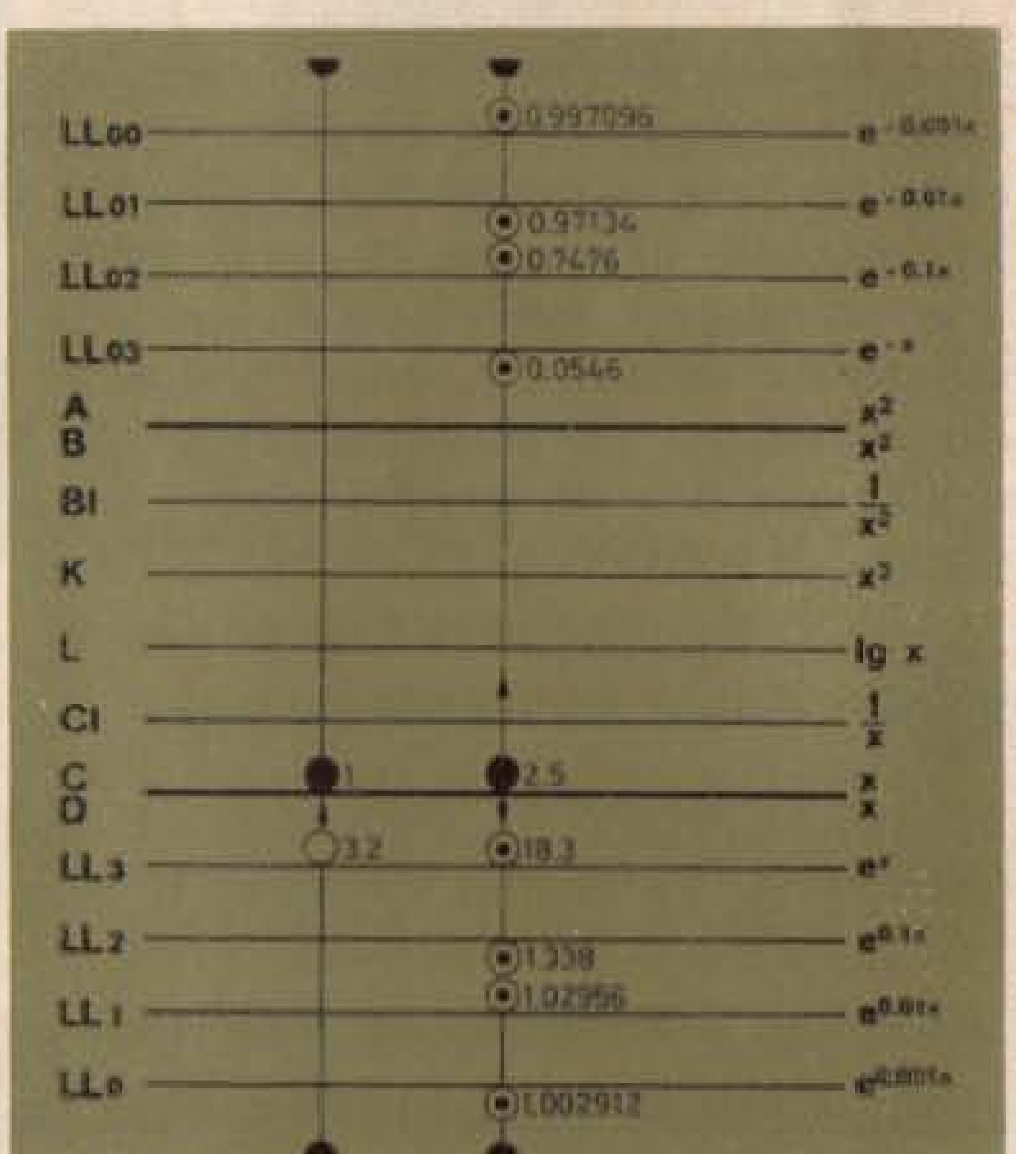


Fig. 55 Potências

Regras para a leitura para $y = a^x$

a) Sendo positivos os expoentes, as bases e os resultados estarão no mesmo grupo de escalas LL0—LL3 ou LL00—LL03; quer dizer: não há mudança de cor. Se forem negativos passa-se dum grupo para o outro (e há mudança de cor).

b) Por analogia com as designações das escalas (gravadas do lado direito destas) faz-se a leitura final numa escala LL adjacente, de índice inferior, quando no expoente se deslocou a vírgula duma casa para a esquerda (veja-se a fig. 55).

c) Se com a base se acertar o final da escala C haverá que ler, normalmente, o resultado na escala LL de índice imediatamente superior (fig. 57).

Para $0 < a < 1$ as potências de expoente positivo encontram-se no grupo de escalas LL00-LL03 e as de expoente negativo no outro grupo LL0—LL3.

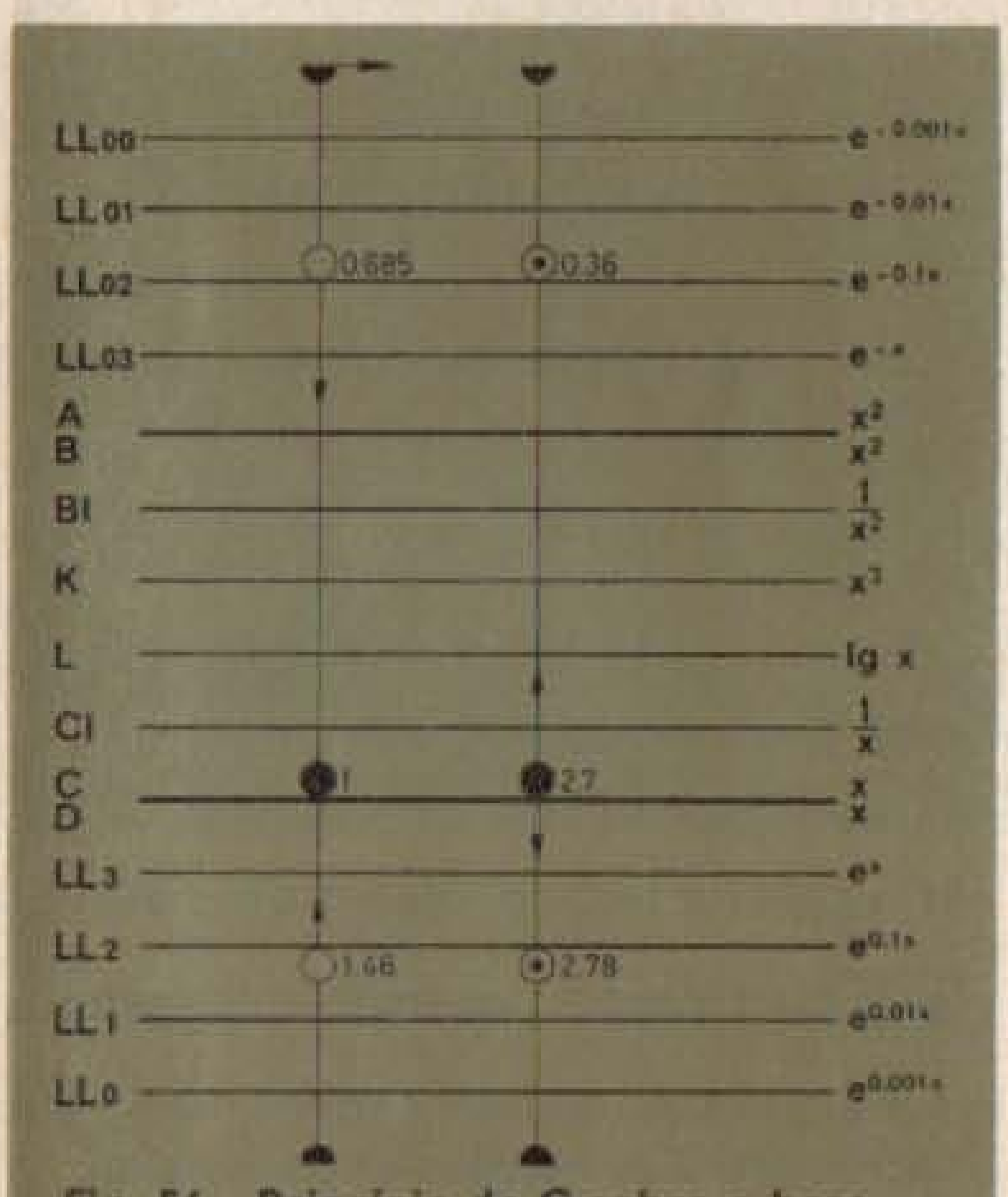


Fig. 56 Princípio de C sobre a base

Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}685^{2{,}7} = 0{,}36 \\ 0{,}685^{-2{,}7} = 2{,}78 \\ 1{,}46^{2{,}7} = 2{,}78 \\ 1{,}46^{-2{,}7} = 0{,}36 \end{array}\right\} \text{(fig. 56)}$$

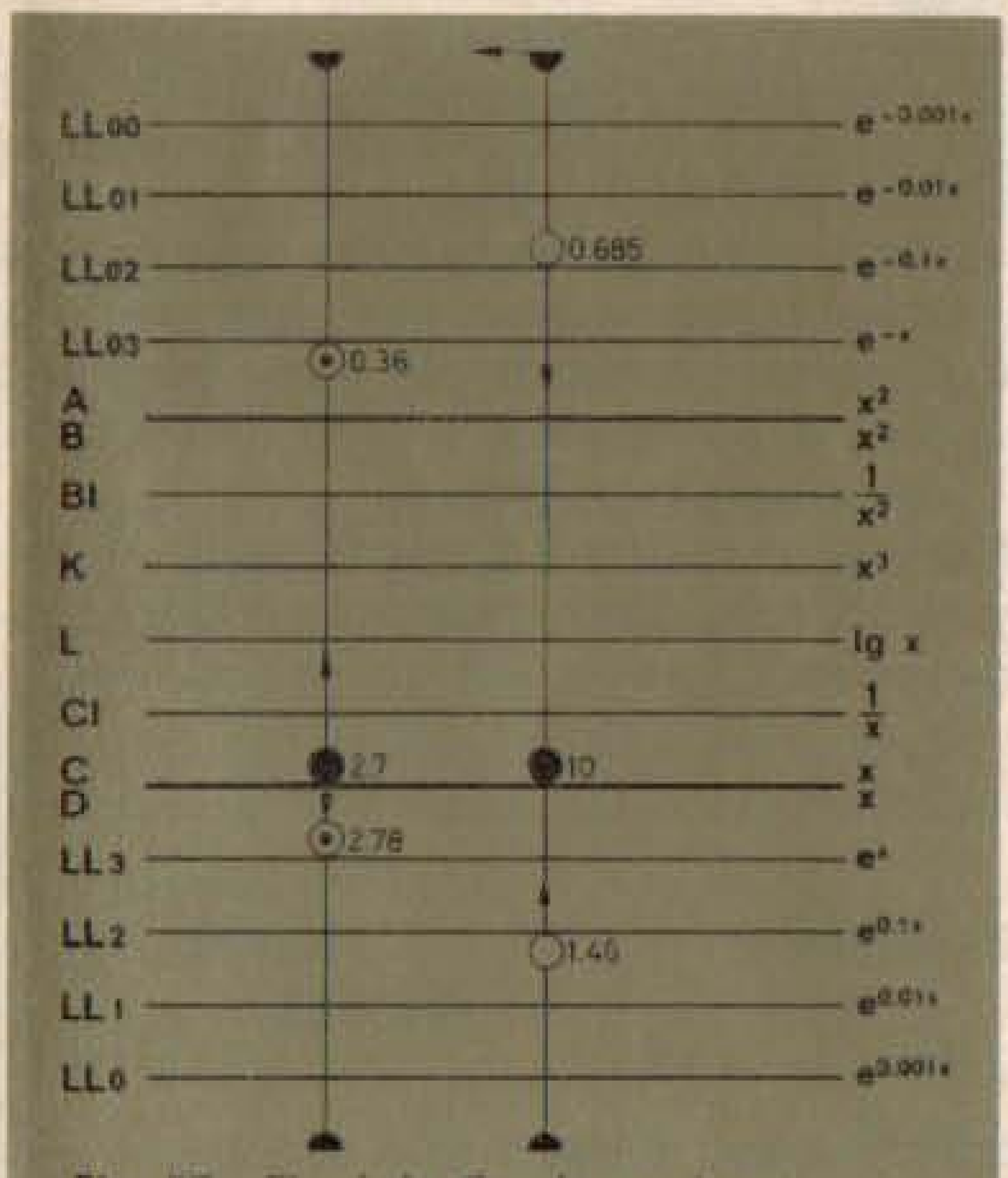


Fig. 57 Final de C sobre a base

Os exemplos da fig. 57 são idênticos aos da fig. 56, mas o acerto é feito com a extremidade direita da escala C. Daí não se lê o resultado na escala na qual se acertou a base, mas na escala adjacente LL3 ou LL03.

Se a base, como no presente caso, se situar mais ou menos a meio da escala, haverá por vezes vantagem em utilizar a escala CF. Nessa altura fica disponível quase a totalidade do comprimento da escala CF, para o acerto do expoente, tornando desnecessário a «translação» da gaveta para a formação de tabelas.

19.3 Casos especiais de $y = a^x$

As possibilidades de variação dos expoentes e das bases são limitadas pela amplitude das escalas exponenciais.

19.3.1 $y > 100000$ e $y < 0{,}00001$

Quando o valor da potência cair fora dos limites das escalas exponenciais haverá que decompôr o expoente em parcelas, ou seja: a potência em factores.

Exemplo:

$3{,}14^{19} = 3{,}14^{6+6+7} = (3{,}14^6)^2 \cdot 3{,}14^7 = 0{,}955^2 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^3 = 2{,}76 \cdot 10^9$

Se o expoente fôr negativo o processo é, naturalmente, o mesmo.

19.3.2 $0{,}999 < y < 1{,}001$

(só para a ARISTO-StudioLog)

Se, por o expoente ser pequeno, o valor da potência fôr menor que 1,001, mas maior que 0,999, ele não poderá ser lido nas escalas LL. Recorre-se então ao desenvolvimento em série:

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \text{Log}\, a + \frac{x^2}{2!} \text{Log}^2\, a \pm \frac{x^3}{3!} \text{Log}^3\, a + \ldots$$

que dá a solução aproximada:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \text{Log}\, a \quad \text{para} \quad |\, x \cdot \text{Log}\, a \,| \ll 1$$

Aos números (a) lidos na escala LL correspondem, na escala D, os seus logaritmos neperianos (Log a) (ver os parágrafos 19.4 e 19.6). Por isso, ao acertar (com o auxílio do cursor) o 1 da escala C com a base «a» (lida em LL), tem-se na escala D, por baixo do expoente (x) lido em C, o produto $x \cdot \text{Log}\, a$. Basta somá-lo ou subtraí-lo á unidade para se ter a potência procurada $a^{\pm x}$. Quanto mais pequeno fôr o expoente mais exacto será o resultado obtido por este método.

Exemplos:

$3{,}2^{0{,}00025} = 1 + 0{,}0002908 = 1{,}0002908$ (como continuação do exemplo $3{,}2^x$)
$3{,}2^{-0{,}00025} = 1 - 0{,}0002908 = 0{,}9997092$

Se o expoente ainda se reduzisse mais, por deslocamento da vírgula para a esquerda, o resultado seria semelhante, apenas aumentaria o número de zeros ou de noves, logo a seguir à vírgula.

$3{,}2^{0{,}000025} = 1{,}00002908.$

19.3.3 $0{,}999 < a < 1{,}001$

(só para a ARISTO-StudioLog)

Quando, no cálculo de $y = a^x$, a base fôr maior do que 0,999, mas menor do que 1,001, recorre-se também a uma solução aproximada.

Como o «a» é muito próximo da unidade, na fórmula $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \text{Log}\, a$, anteriormente obtida, pode-se pôr $a = 1 \pm n$ e tem-se então:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \text{Log}\,(1 \pm n)$$

Mas como $\quad \text{Log}\,(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \cdots$

pode-se tomar $\quad \text{Log}\,(1 \pm n) \approx \pm n \quad$ para $\quad |\, n \,| \ll 1$

logo: $\quad (1 \pm n)^x \approx 1 \pm n x \quad$ para $\quad |\, nx \,| \ll 1$

$\quad (1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp n x \quad$ para $\quad |\, nx \,| \ll 1$

Se a amplitude de LL não fôr suficiente, pode-se efectuar o cálculo com a escala D como se fosse a escala LL, só com a diferença que se utiliza em vez de $a = 1 \pm n$ o valor $|\, n \,|$.

Acertar o 1 de C com o n lido na escala D é práticamente o mesmo que ler Log $(1 \pm n)$ numa escala exponencial que fosse o prolongamento das existentes (de 1,0001 a 1,001 ou de 0,999 a 0,9999). A aproximação $\text{Log}\,(1 \pm n) \approx \pm n$ é tanto mais exacta quanto menor fôr o n.

O resto do cálculo efectua-se seguindo as regras habituais para a determinação duma potência. Haverá que juntar o 1 ou subtrair 1 às leituras finais feitas na escala D, que resultam afinal duma simples multiplicação $n \cdot x$. Quando o expoente aumentar suficientemente o resultado já poderá ser lido directamente na respectiva escala exponencial.

Exemplos:	leitura na escala
$1{,}00023^{3{,}7} = (1 + 0{,}00023)^{3{,}7} = 1{,}000851$	D (somar a 1)
$1{,}00023^{37} = 1{,}00854$	LLo
$0{,}99977^{3{,}7} = (1 - 0{,}0023)^{3{,}7} = 0{,}999149$	D (subtrair a 1)
$0{,}99977^{37} = 0{,}99152$	LLoo

19.3.4 $0{,}99 < y < 1{,}01$

(só para a ARISTO-Studio)

Se, por o expoente ser pequeno, o valor da potência fôr menor que 1,01, mas maior que 0,99, ele não poderá ser lido nas escalas LL. Recorre-se então ao desenvolvimento em série:

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!}\,\mathrm{Log}\,a + \frac{x^2}{2!}\,\mathrm{Log}^2 a \pm \frac{x^3}{3!}\,\mathrm{Log}^3 a + \cdots$$

que dá a solução aproximada:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \mathrm{Log}\,a \quad \text{para} \quad |x \cdot \mathrm{Log}\,a| \ll 1$$

Aos números (a) lidos na escala LL correspondem, na escala D, os seus logaritmos neperianos (Log a) (ver os parágrafos 19.4 e 19.6). Por isso, ao acertar (com o auxílio do cursor) o 1 da escala C com a base «a» (lida em LL), tem-se na escala D, por baixo do expoente (x) lido em C, o produto $x \cdot \mathrm{Log}\,a$. Basta somá-lo ou subtraí-lo à unidade para se ter a potência procurada $a^{\pm x}$. Quanto mais pequeno fôr o expoente mais exacto será o resultado obtido por este método.

Exemplos

$3{,}2^{0{,}0025} \approx 1 + 0{,}0025 \cdot \mathrm{Log}\,3{,}2$ (como continuação do exemplo $3{,}2^x$)

$\approx 1 + 0{,}002908 = 1{,}002908$

$3{,}2^{-0{,}0025} = 1 - 0{,}002908 = 0{,}997092$

Se o expoente ainda se reduzisse mais, por deslocamento da vírgula para a esquerda, o resultado seria semelhante, apenas aumentaria o número de zeros ou de noves, logo a seguir à vírgula.

$3{,}2^{0{,}00025} = 1{,}0002908$

19.3.5 $0{,}99 < a < 1{,}01$

(só para a ARISTO-Studio)

Quando no cálculo de $y = a^x$, a base fôr maior do que 0,99, mas menor do que 1,01, recorre-se também a uma solução aproximada.

Como o «a» é muito próximo da unidade, na fórmula $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \mathrm{Log}\,a$, anteriormente obtida, pode-se pôr $a = 1 \pm n$ e tem-se então:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \mathrm{Log}\,(1 \pm n)$$

Mas como $\quad \mathrm{Log}\,(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \ldots$

pode-se tomar $\text{Log}\,(1 \pm n) \approx \pm n$ para $|n| \ll 1$

logo: $(1 \pm n)^x \approx 1 \pm nx$ para $|nx| \ll 1$

$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp nx$ para $|nx| \ll 1$

Se a amplitude de LL não fôr suficiente, pode-se efectuar o cálculo com a escala D como se fosse a escala LL, só com a diferença que se utiliza em vez de $a = 1 \pm n$ o valor $|n|$.

Acertar o 1 de C com o n lido na escala D é pràticamente o mesmo que er Log $(1 \pm n)$ numa escala exponencial que fosse o prolongamento das existentes (de 1,001 a 1,01 ou de 0,99 a 0,999). A aproximação $\text{Log}\,(1 \pm n) \approx \pm n$ é tanto mais exacta quanto menor fôr o n.

O resto do cálculo efectua-se seguindo as regras habituais para a determinação duma potência. Haverá que juntar o 1 ou subtrair 1 às leituras finais feitas na escala D, que resultam afinal duma simples multiplicação $n \cdot x$. Quando o expoente aumentar suficientemente o resultado já poderá ser lido directamente na respectiva escala exponencial.

Exemplos:	leitura na escala
$1{,}0023^{3,7} = (1 + 0{,}0023)^{3,7} = 1{,}00851$	D (somar a 1)
$1{,}0023^{37} = 1{,}0888$	LL1
$0{,}9977^{3,7} = (1 - 0{,}0023)^{3,7} = 0{,}99149$	D (subtrair a 1)
$0{,}9977^{37} = 0{,}9184$	LL01

A distância entre a divisão 1,01, da escala LL1, e o traço do cursor colocado sobre o princípio da escala D dá uma ideia do erro máximo que se pode cometer com estes cálculos aproximados. Os erros serão maiores quando a leitura inicial e a final forem ambas feitas na escala D.

19.3.6 Aumento da precisão dos cálculos
(só para a ARISTO-Studio)

Consegue-se maior exactidão corrigindo aquela diferença, entre a escala D e a escala exponencial, considerando o termo quadrático dos desenvolvimentos em série.

A) $\text{Log}\,(1 \pm n) \approx \pm n - \frac{n^2}{2} = \pm n\left(1 \mp \frac{n}{2}\right)$

será o valor a tomar em D, vez do n, no princípio do cálculo.

B) A correcção $z\left(1 \pm \frac{z}{2}\right)$, vista atrás para a leitura final feita em D, dá para a potência o valor $a^x \approx 1 \pm z\left(1 \pm \frac{z}{2}\right)$, que se transforma em:

$e^x \approx 1 \pm x\left(1 \pm \frac{x}{2}\right)$ para $a = e$.

Se o resultado fôr lido já numa escala exponencial bastará a correcção A) ao colocar a leitura em D. Se fôr só esta a utilizada haverá que fazer as duas correcções: a da colocação inicial A) e a da leitura final B).

Exemplo: $1{,}0023^{3,7} = 1{,}00854$

$$0{,}0023 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\,0{,}0023\right) = 0{,}0023 \cdot 0{,}99885 = 0{,}002297.$$

Será com este valor, em vez de $n = 0{,}0023$, que se ajustará o 1 da escala D da gaveta. O cálculo, para a potência, será agora $1 + 0{,}002297 \cdot 3{,}7 = 1{,}00850$. Como foi uma leitura na escala D corrige-se pela fórmula B):

$$0{,}00850\left(1+\frac{1}{2}\,0{,}00850\right)=0{,}00850\cdot 1{,}00425=0{,}00854.$$

Juntando-lhe 1 tem-se o resultado 1,00854, muito próximo do exacto (1,0085362).

Este cálculo, que à primeira vista parece complicado, torna-se mais fácil com a prática, a ponto de se chegar a fazer as correcções por estimativa. Tais correcções não são necessárias quando o valor da base seja < 1,001, porque a precisão obtida seria a da régua de cálculo.

19.4 Potências $y = e^x$

$y = e^x$ corresponde à posição «fechada» da gaveta, em que as escalas C e D coincidem, coincidindo os seus inícios com o e = 2,718. As potências de base «e» podem-se pois obter na escala LL acertando o cursor com o expoente lido em D. Acertando o cursor sobre 1,489 (escala D), lêem-se os seguintes valores:

$e^{1{,}489} = 4{,}43$	$e^{-1{,}489} = 0{,}2260$
$e^{0{,}1489} = 1{,}1605$	$e^{-0{,}1489} = 0{,}8617$
$e^{0{,}01489} = 1{,}015$	$e^{-0{,}01489} = 0{,}98523$
$e^{0{,}001489} = 1{,}001489$	$e^{-0{,}001489} = 0{,}998513$

Com outras variações voltamos novamente à correspondência com $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$:

$$e^{0{,}0001489} = 1{,}0001489$$

19.5 Raízes $a = \sqrt[x]{y}$

As escalas exponenciais permitem o cálculo de raízes de qualquer índice. A extracção de raízes, ao contrário da determinação de potências, corresponde a uma divisão com as escalas LL e a escala fundamental C. Operando com a potência $3{,}2^{2{,}5} = 18{,}3$, conforme o capítulo 19.2, lê-se na direcção oposta

$$\sqrt[2{,}5]{18{,}3} = 3{,}2.$$

As raízes podem também ser expressas em potências. Nesse caso os expoentes serão acertados na escala CI, ou então em DI, se «e» fôr a base.

No exemplo seguinte coloca-se o cursor da ARISTO-StudioLog sobre 3,5 em DI e lê-se em LL2 ou LL02:

$$\sqrt[3{,}5]{e} = e^{+\frac{1}{3{,}5}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3{,}5]{e}} = e^{-\frac{1}{3{,}5}} = 0{,}7514$$

Processo de cálculo:

a) Ajustar o expoente x, lido em C, com o radicando y lido em LL.

b) Ler o valor da raiz com o extremo inicial ou final, de C, na correspondente escala LL.

Também se aplicam, aqui, as normas de leitura indicadas no parágrafo 19.2, mas quando se utiliza o extremo final de C deverá a leitura ser feita na escala LL de índice imediatamente inferior (de LL0—LL3 ou de LL00—LL03).

$\sqrt[0,77]{21} = 52,1$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[0,77]{21}} = 0,0192$

$\sqrt[7,7]{21} = 1,485$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[7,7]{21}} = 0,6734$

$\sqrt[77]{21} = 1,0403$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[77]{21}} = 0,96122$

$\sqrt[770]{21} = 1,00396$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[770]{21}} = 0,99605$

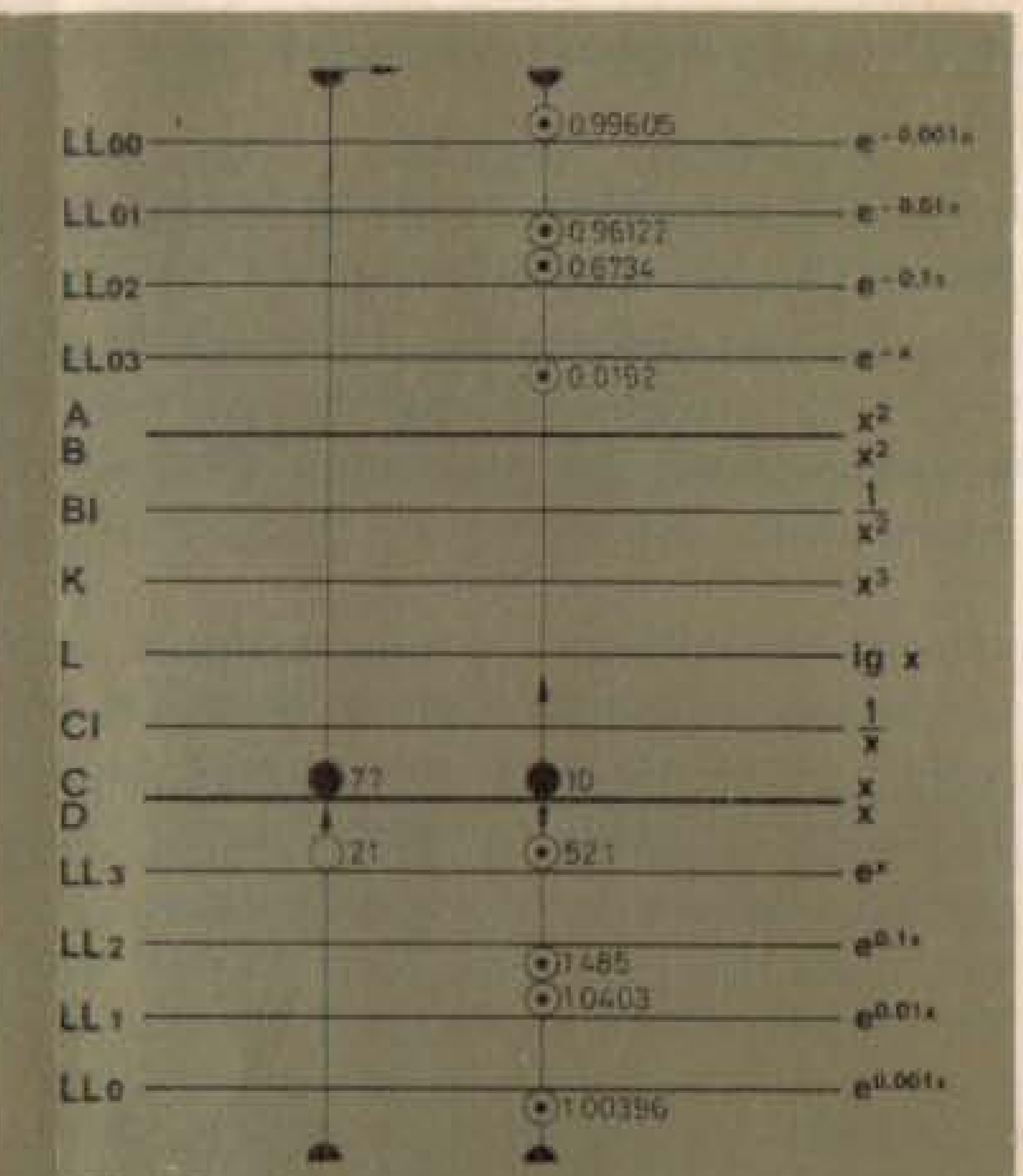


Fig. 58 Raízes

19.6 Logaritmos

19.6.1 Logaritmos de qualquer base

Como a função logarítmica é a inversa da exponencial, qualquer logaritmo se pode determinar com as escalas exponenciais.

$y = a^x \qquad x = \log_a y$ (logaritmo de base «a» de y).

A determinação do logaritmo corresponde a um problema de potências em que se procura o expoente.

Processo de cálculo:

a) Colocar o início da escala C sobre o valor da base «a», na correspondente escala LL.

b) Acertar o cursor com o número y dado, que se lê na mesma escala exponencial.

c) Leitura do logaritmo, na escala C, sob o traço do cursor.

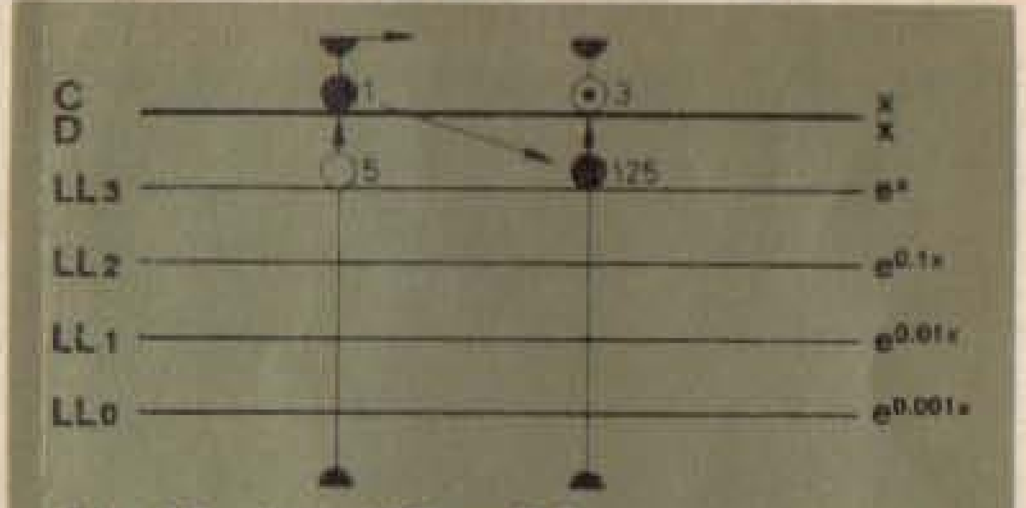


Fig. 59 $\log_5 125 = 3,0$

A determinação da posição da vírgula deduz-se da relação conhecida: $\log_a a = 1$. Os logaritmos dos números à direita da base são maiores do que 1, e os à esquerda dela são menores do que 1.

Regras para a leitura:

a) Cada passagem duma escala LL a outra adjacente — pela ordem sucessiva LL3, LL2, LL1, LL0 ou LL03, LL02, LL01, LL00 — implica o deslocamento da vírgula, do logaritmo, de uma casa para a esquerda. Seria para a direita se a mudança de escala fosse em sentido inverso.

b) Os logaritmos serão positivos quando os números e as bases estiverem sobre escalas LL de mesma cor. No caso contrário serão negativos.

Exemplos:

$\log_2 16 = 4,0$

$\log_2 1,02 = 0,02857$

$\log_2 0,25 = -2$

19.6.2 Os logaritmos decimais

Os logaritmos decimais (log) obtêm-se acertando o 1 de C com o 10 de LL (fig. 60 e 61).

Também se pode utilizar a escala lg x (ou L) da gaveta que nos dá, por correspondência, as mantissas dos números lidos em C.

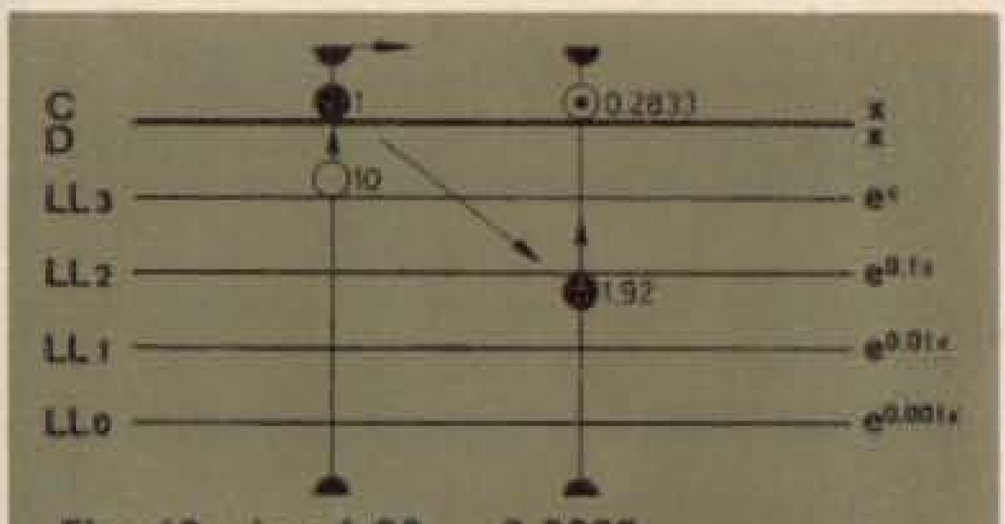


Fig. 60 log 1,92 = 0,2833

Como nas tábuas de logaritmos a característica é formada segundo a regra «número de casas menos 1» e é somada à mantissa. Assim, acima de cada valor da escala C encontra-se o seu logaritmo correspondente. Inversamente lê-se directamente o número a partir do logaritmo.

Para utilizar a escala L desloca-se apenas o cursor; a procura dos logaritmos decimais torna-se mais fácil do que com as escalas LL. Em contrapartida, dentro da amplitude da escala LL1 há maior precisão de leitura na escala LL.

Exemplo:

$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}01283$ (com a escala LL1)
$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}013$ (com a escala L)

Exemplos para exercício com logaritmos decimais (fig. 62):

$\log_{10} 50 = 1{,}699$
$\log_{10} 2 = 0{,}3010$
$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}01\,283$
$\log_{10} 0{,}015 = -1{,}824$
$\log_{10} 0{,}5 = -0{,}3010$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$
$\log_{10} 6 = 0{,}778$
$\log_{10} 1{,}14 = 0{,}0569$
$\log_{10} 1{,}015 = 0{,}00647$

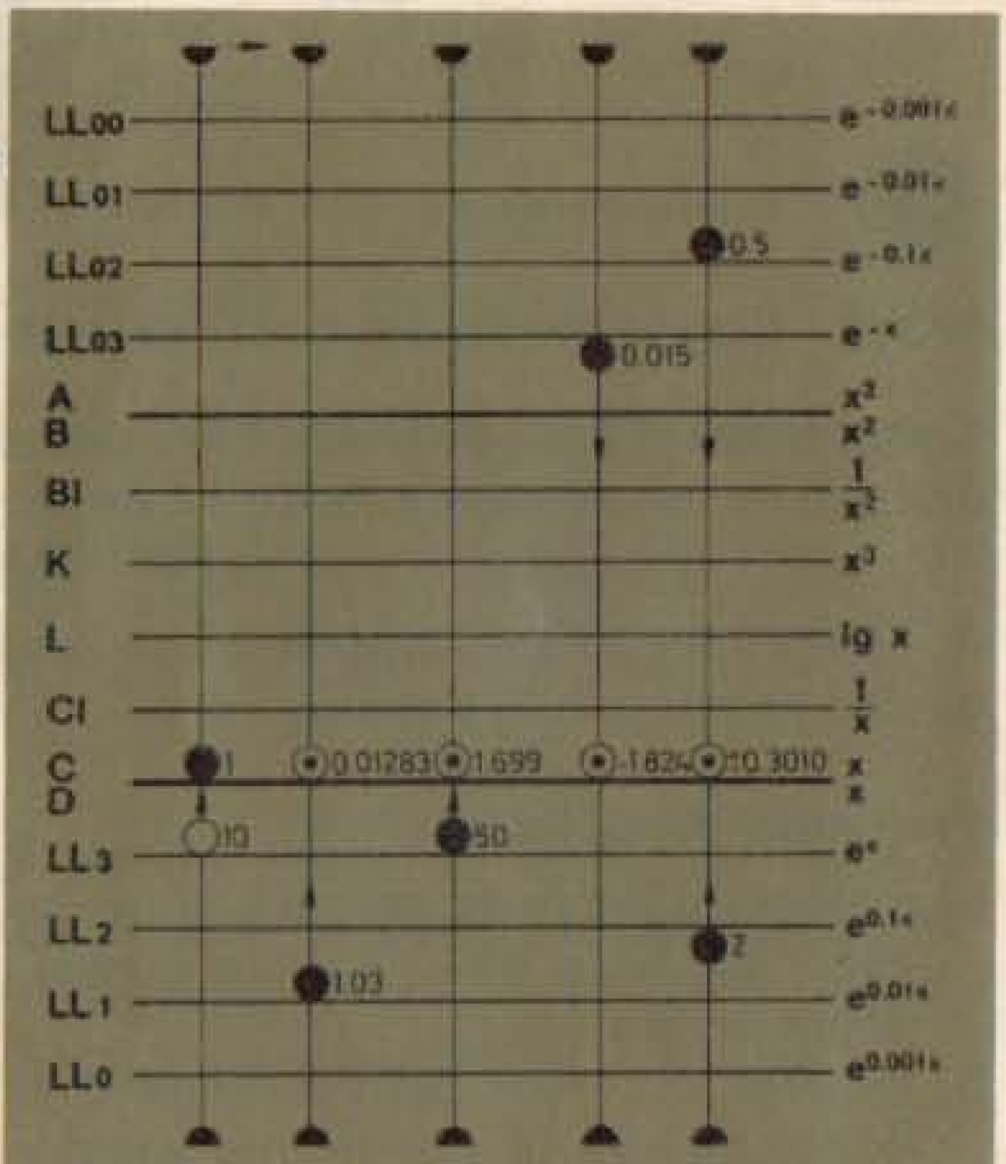


Fig. 61 Logaritmos decimais

Se se acerta com o fim da escala C, todas as leituras se encontram à esquerda da base, e são portanto < 1, p. e. $\log_{10} 9 = 0{,}954$. Os logaritmos dos números < 1 são negativos.

19.6.3 Os logaritmos naturais

Os logaritmos naturais ou neperianos de base «e» (Log), por este valor corresponder ao 1 de D, determinam-se imediatamente nesta escala (fig 63).

Exemplos para exercício:

Log 4,375 = 1,475
Log 0,622 = − 0,475
Log 0,05 = − 2,994

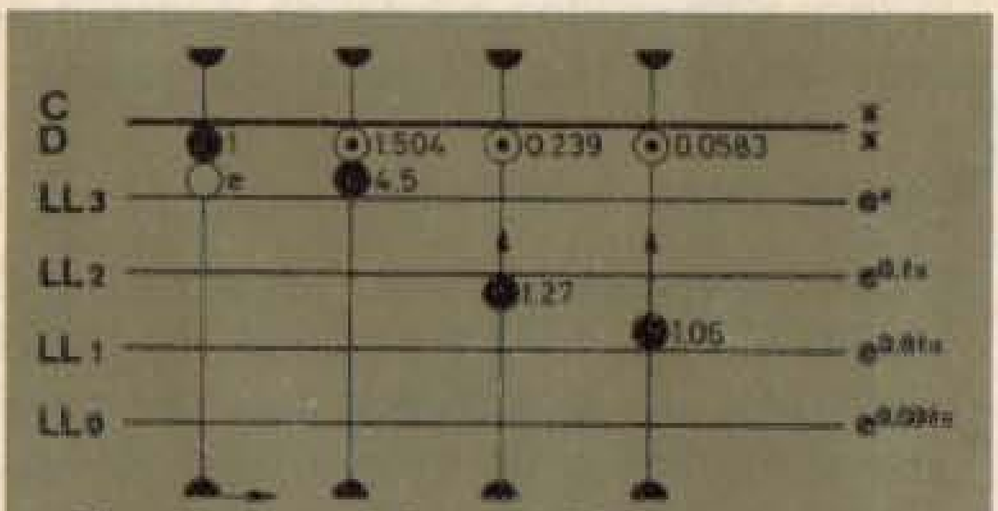


Fig. 62 Log 4,5 = 1,504
Log 1,27 = 0,239
Log 1,06 = 0,0583

20. Outras aplicações das escalas exponenciais

Até agora utilizamos apenas a escala C ao calcular com as escalas exponenciais, para dar relevo às correlações principais. Evidentemente podem utilizar-se também outras escalas da gaveta, cujas relações com a escala C já foram mencionadas em capítulos anteriores.

Assim, a escala B pode ser utilizada para uma potência da forma $a^{\sqrt{x}}$. Por vezes torna-se vantajoso utilizar a escala de senos S na gaveta (da régua ARISTO-StudioLog) para calcular $e^{\operatorname{sen} x}$. Também as inversões oferecem possibilidades apreciáveis, no cálculo logarítmico. Para a formação de tabelas, estando a base situada mais ou menos a meio da régua, torna-se útil trabalhar com a escala CF, em vez de C, para evitar a «translação» da gaveta.

20.1 Cálculo de proporções com as escalas exponenciais

Coincidindo o princípio da escala C com a base «a», lida em LL, pode-se obter o valor de qualquer potência ou o logaritmo de qualquer número, para essa base. Esta base «a», colocada em LL, é pois um factor de proporcionalidade.

20.1.1 $y_1 = a^n \qquad y_2 = a^m$

$$\log y_1 = n \cdot \log a \qquad \log y_2 = m \cdot \log a$$

$$\frac{\log a}{1} = \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m}$$

ou
$$\frac{\operatorname{Log} a}{1} = \frac{\operatorname{Log} y_1}{n} = \frac{\operatorname{Log} y_2}{m}$$

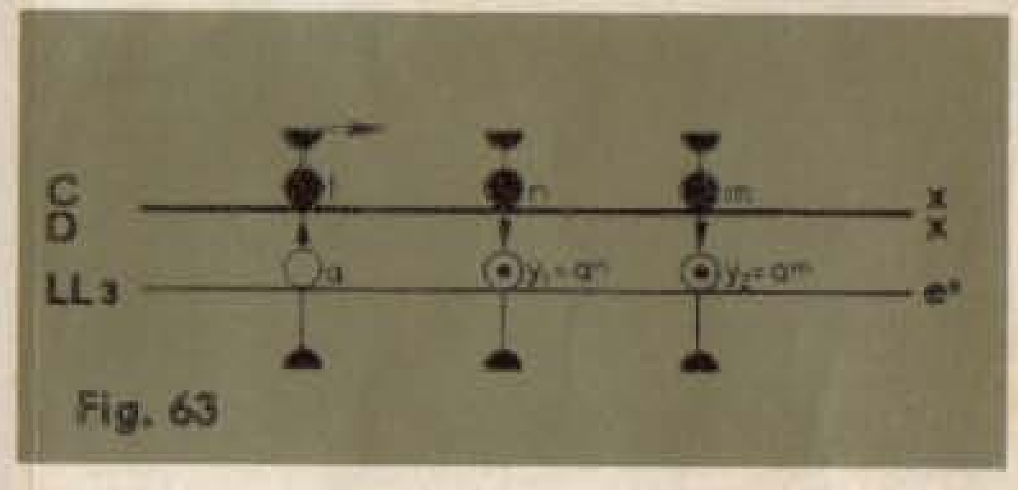


Fig. 63

Conhecidos três termos da proporção fàcilmente se obtem o quarto. E isto sem mudança de posição, para a mesma fórmula.

Para se aproveitar esta propriedade, cómoda para o cálculo, bastará dar às fórmulas empregadas uma forma apropriada.

20.1.2

$$y = a^{\frac{m}{n}} \rightarrow \log y = \frac{m}{n} \cdot \log a$$

$$\frac{\log y}{m} = \frac{\log a}{n}$$

$$y = 4{,}3^{\frac{6{,}8}{2{,}7}} \rightarrow \frac{\log y}{6{,}8} = \frac{\log 4{,}3}{2{,}7}$$

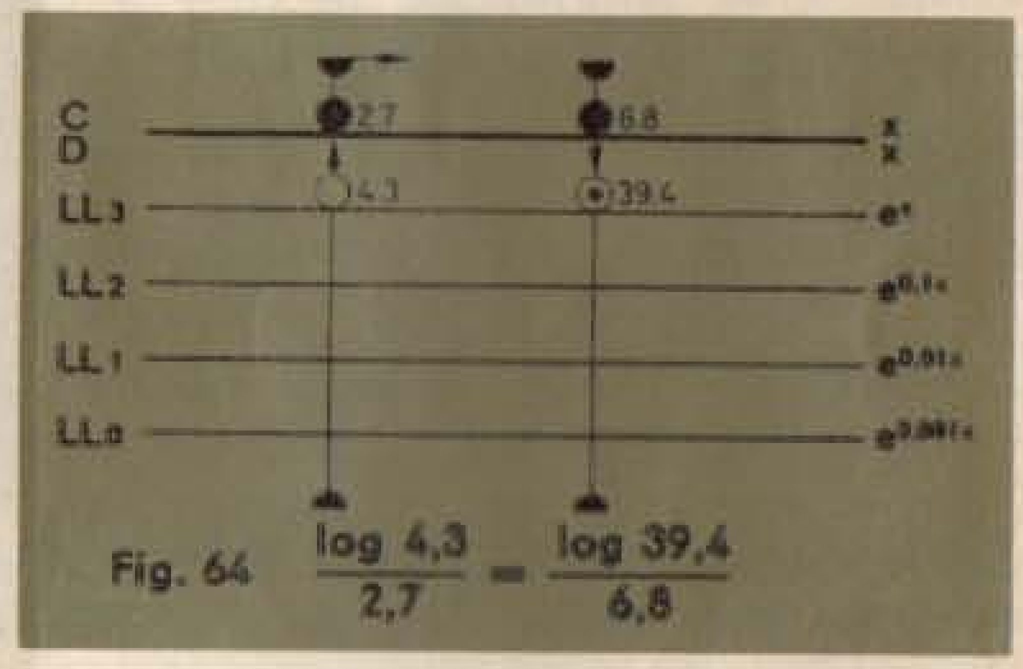


Fig. 64

Fazendo coincidir o 2,7 de C com o 4,3 de LL3 tem-se, nesta, o resultado 39,4 em correspondência com o 6,8 da outra escala.

Do mesmo modo se resolviam estes outros aspectos do mesmo problema.

$$y = \sqrt[2{,}7]{4{,}3^{6{,}8}} \quad \text{ou} \quad y^{2{,}7} = 4{,}3^{6{,}8}$$

20.1.3

Pode-se dar o aspecto de proporção a muitas leis científicas, em que uma variável é proporcional ao logaritmo de outra.

Para dois conjuntos de valores correspondentes tem-se:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const.}\,(x_2 - x_1)$$

Chamando i à variação de x, e r à relação entre os valores de y correspondentes, pode-se dar à expressão anterior o aspecto:

$$\frac{\log r}{i} = \text{const.} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \cdots$$

Exemplo: Desintegração radioactiva.
Uma dada substância desintegra-se de 40% em 30 dias, ficando pois reduzida a 60% da quantidade inicial. Quando restarão só 20%?

$$i_1 = 30$$
$$r_1 = 0{,}6$$
$$r_2 = 0{,}2$$

$$\frac{\log 0{,}6}{30} = \frac{\log 0{,}2}{x}$$
$$x = 94{,}5 \text{ dias}$$

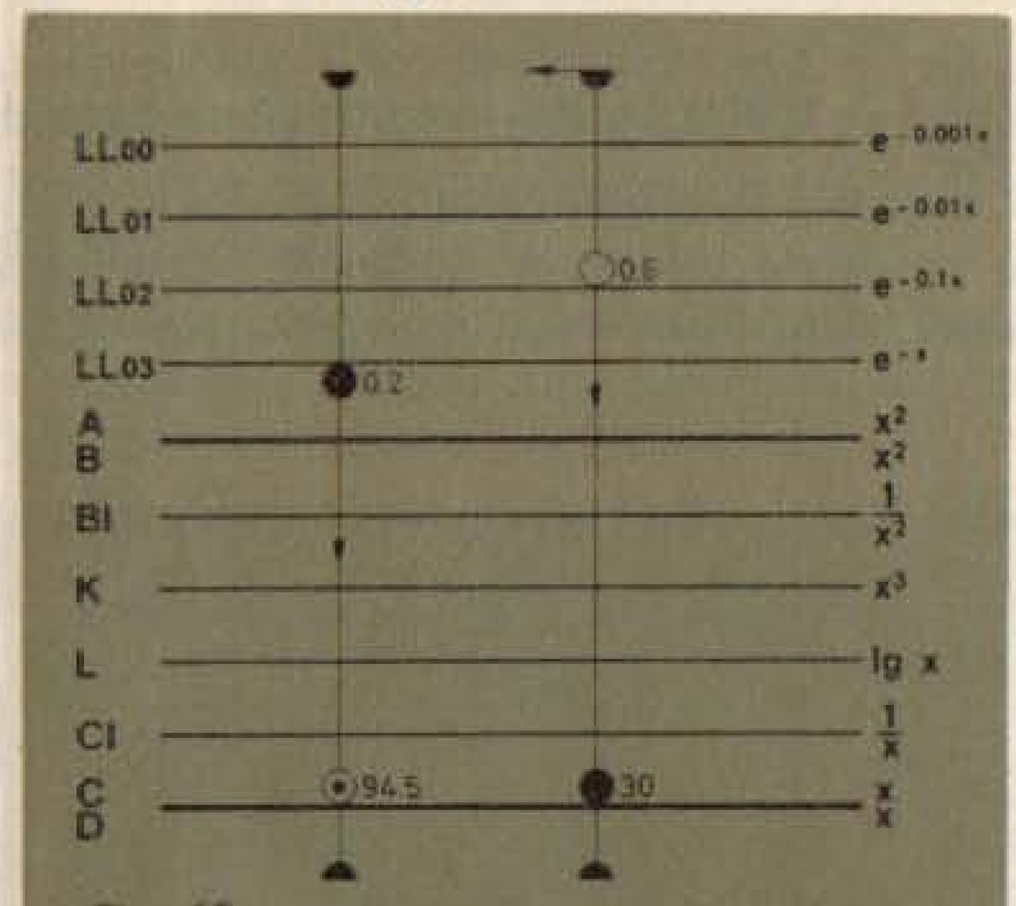


Fig. 65

20.1.4

Para multiplicar um logaritmo por uma constante ($x = c \cdot \log_a y$) acerta-se a constante, lida em C, com a base do logaritmo, lido em LL, afim de obter a disposição vista atraz, para as proporções, por se dar esse aspecto à fórmula dada.

$$\frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

Exemplos:

$2 \cdot \log_{10} 100 \quad = 4$
$2 \cdot \log_{10} \quad 1{,}8 = 0{,}511$

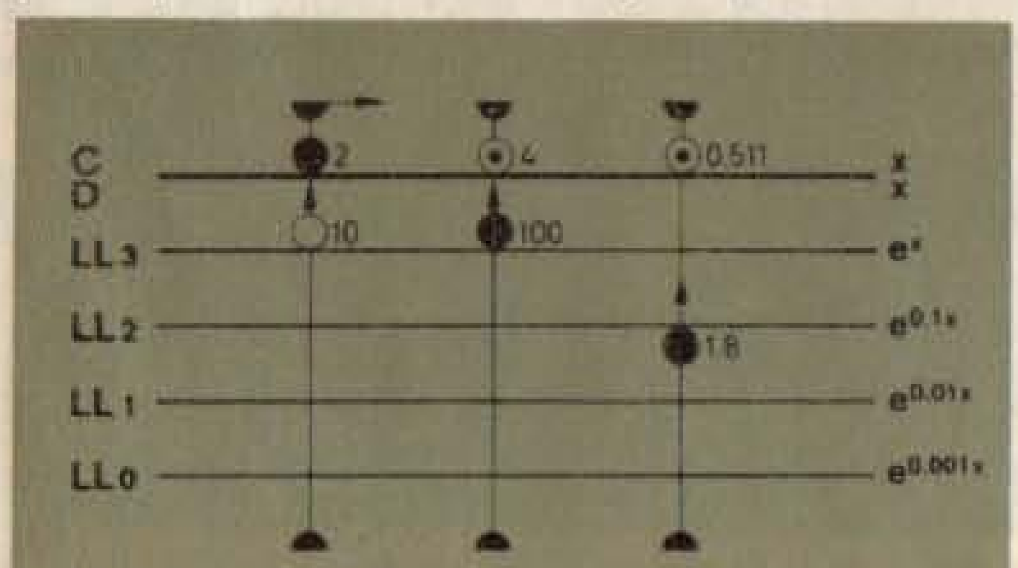


Fig. 66 $x = 2 \cdot \log y$

Com a disposição da fig. 66 todos os logaritmos de base 10 poderão ser multiplicados pelo factor 2. Para os logaritmos dos números < 1 usam-se as escalas LL.

Em física e técnica de comunicações há, por vezes, que calcular os decibeles sob a forma de uma relação de tensões. $\quad dB \triangleq 20 \cdot \log \frac{A_1}{A_2}.$

Exemplos:

20 dB = 20 log 10
40 dB = 20 log 100
5,11 dB = 20 log 1,8

20.2 Funções hiperbólicas

A lógica disposição das escalas LL permite o cálculo das funções hiperbólicas com bastante facilidade. Como as potências com expoentes positivos e negativos se encontram em correspondência, basta um deslocamento do cursor para a leitura de e^{+x} e e^{-x}, necessária para o cálculo das funções hiperbólicas.

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{(e^{x} - e^{-x})}{(e^{x} + e^{-x})}$$

21. O cursor e os seus traços

21.1 O indice 36 (só nos modelos 868, 0968 e 0969)

O cursor tem, do lado dos ângulos da régua (fig. 67), um pequeno traço, acima e à direita, o qual corresponde ao 36 das escalas CF/DF quando a traço maior estiver no 1 inicial das escalas C/D. Passando, deste modo, destas escalas para aquelas, fácilmente se multiplicam por 36 os números lidos nas últimas. Esta operação aparece em muitas conversões de unidades. Exemplos:

1 hora = 3600 segundos
1 m/s = 3,6 km/h
1° = 3600″
100% = 360°
1 ano = 360 dias
1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^{6}$J
^{x}Al = $36 \dfrac{m}{\Omega\, mm^{2}}$ (condutibilidade)

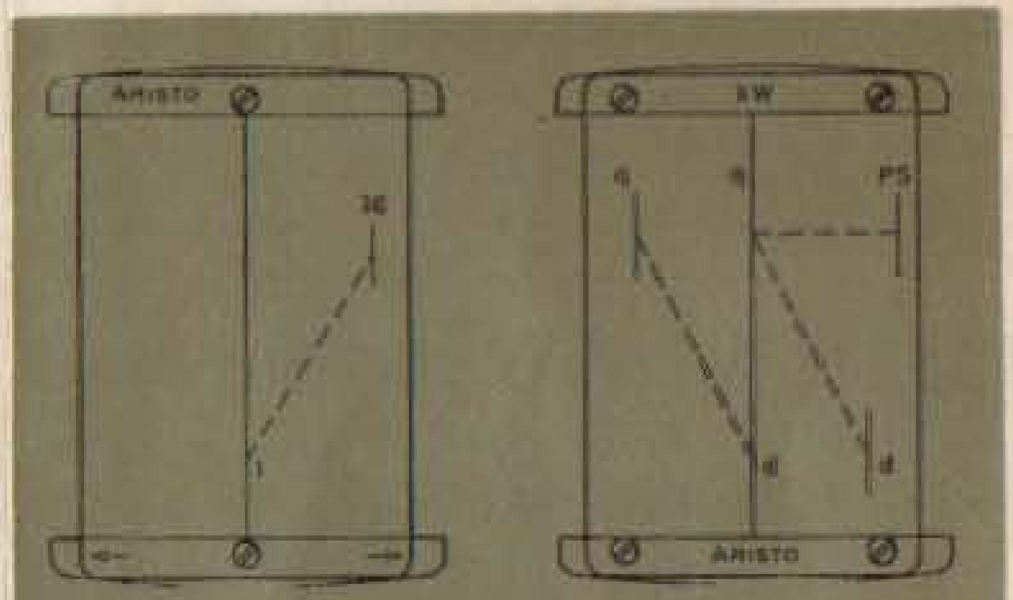


Fig. 67 Fig. 68

21.2 Área do círculo, peso de aços de construção

No outro lado do cursor (fig. 68) a distância entre o risco médio grande e os riscos pequenos, superior da esquerda e inferior da direita, dá o factor $\pi/4 = 0{,}785$ (relacionado com a escala dos quadrados). Serve para o cálculo de áreas de círculos, pela fórmula $q = d^{2} \cdot \pi/4 = d^{2} : \frac{4}{\pi}$. Acertando o traço médio com o diâmetro (d) lido em D tem-se a área no da esquerda, na escala A. O mesmo se obteria com o traço pequeno inferior e o médio.

Como a densidade da aço macio se pode tomar igual a 7,85 g/cm³ a distância entre os traços também corresponde a este número, bastando dividir por ele o volume, para se ter o peso da peça considerada. Ajustado o traço inferior da direita com o diâmetro, tem-se no médio a área da secção e no traço pequeno da esquerda o peso por unidade de comprimento. Acertado com ele o início da escala B, e lendo nesta o comprimento do varão, tem-se em A o peso procurado.

21.3 Os índices kW e PS (CV)

O traço pequeno superior da direita do cursor, deste mesmo lado (fig. 68) tem a designação PS que corresponde ao CV português. A sua distância ao traço central, que tem a indicação kW, dá o factor 736 para a transformação de CV em kW, e vice-versa, com as escalas A e B. Colocando o traço médio em 20 kW o superior da direita dará 27,2 CV.

Inversamente, colocando a marca PS no valor 7 CV o risco médio dará 5,15 kW. Nas réguas do modelo n° 01068 o traço kW é o superior da esquerda, que se combina do mesmo modo com o PS da direita.

Para cálculos com medidas inglesas fornecem-se cursores que têm um traço HP, em vez do PS, o qual dá o factor 746 de conversão para essa unidade (n° de referência para a encomenda: o do cursor vulgar seguido da letra E, por ex. L 0968 E).

21.4 Como tirar o cursor

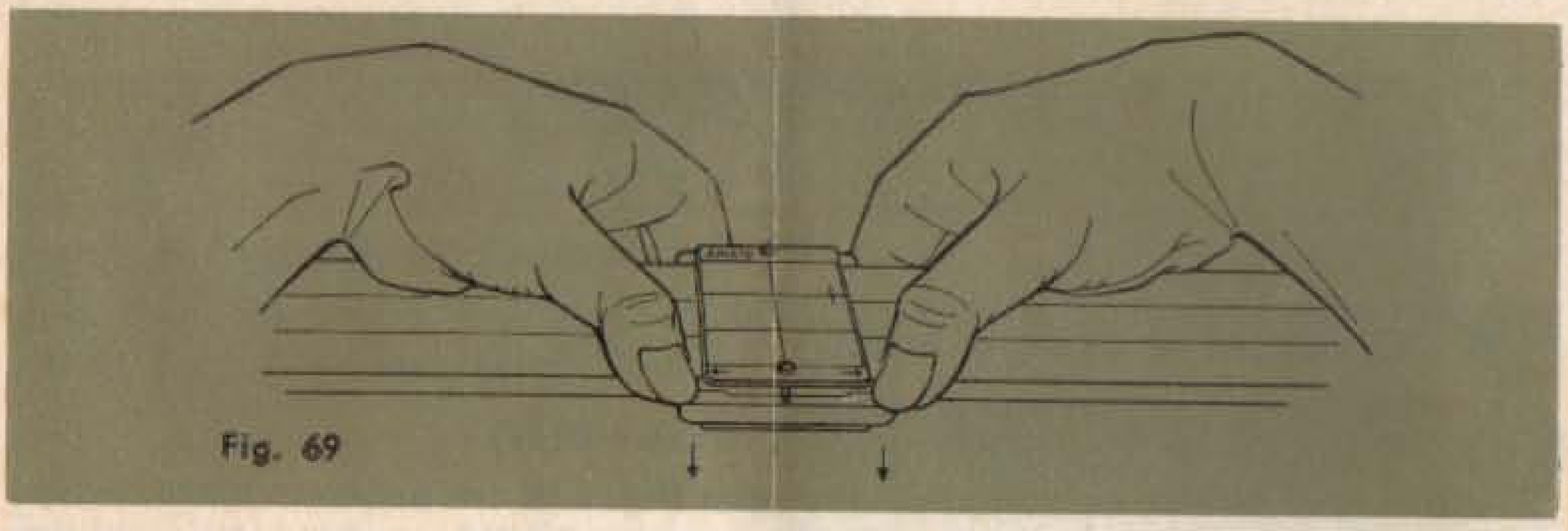


Fig. 69

Os traços do cursor estão acertados pelas escalas de modo que, nos cálculos, se pode passar dum lado para o outro da régua. O cursor pode ser tirado sem se desafinar. Os vidros estão fixados num lado do cursor por quatro parafusos, do outro lado por dois parafusos que funcionam como molas de pressão. Para tirar o cursor carrega-se com uma leve pressão dos polegares na parte lateral, no sentido das setas, como mostra a fig. 69, abrindo assim uma das molas de pressão. A outra abre por si ao levantar-se o vidro. O cursor pode ser retirado com facilidade.

21.5 Afinação do cursor

Ela pode ser necessária, por exemplo quando da substituição do cursor. Coloca-se a régua numa mesa com o lado dos quatro parafusos para cima. Aliviam-se estes com uma chave adequada e, virando a régua, acerta-se a linha média com o traço final das escalas T1 e S. Tomando muito cuidado para não deslocar o cursor, volta-se novamente a régua e acerta-se cuidadosamente o vidro superior do cursor com o final das escala A e D, ou os traços auxiliares nas escalas LL, sem o mover. Apertam-se depois os quatro parafusos, segundo as diagonais. Qualquer parafuso perdido poderá ser substituido pelo fornecedor.

22. A régua com os números normais (escala NZ 1364)

(só com os modelos nº 0968, 0969 e 01068)

22.1 Descrição da escala NZ

Normalização e estandardização tornaram-se factores importantes em qualquer fabricação racional, tendo, como os números normais, cada vez maior significação na técnica. Os números normais, segundo DIN 323, são escolhidos de entre uma progressão geométrica (serie de Renard) relacionada com uma divisão decimal.

Vê-se melhor a relação observando uma escala fundamental D e a escala de mantissas L duma régua de cálculo.

Em correspondência com valores de mantissas regularmente espaçadas, na escala L, encontram-se, na escala D, os números correspondentes, cujos valores arredondados se chamam «números normais». Desta relação da escala D com a L resultará uma escala de números normais (NZ) se se suprimir a escala D e se marcar, em L, só os números normais, nas divisões correspondentes da escala de mantissas, assim simplificada.

Em correspondência com as dez divisões numeradas da escala L têm-se, em D, os números normais da série R 10. A divisão de L em 20 partes iguais dá os da série R 20, e em 40 os da R 40.

Ao lado da escala de mm dessa régua estão indicados os valores dos números normais: por triângulos para a série R 10, por traços para a R 20 e por pontos para a R 40.

22.2 Finalidade da escala NZ

A régua NZ é, em primeiro lugar, um auxiliar da memória, permitindo ter à mão os números normais mais correntes. A indicação destes nas escalas métricas é muito prática para marcar valores normais em desenhos técnicos e também muito útil para o traçado dos quadriculados logarítmicos, simples ou duplos, da nomografia. As escalas NZ também servem para cálculos aproximados.

A combinação dos números normais e suas mantissas, na mesma escala, tem a vantagem de simplificar os cálculos logarítmicos aproximados, pois na escala de mantissas, em correspondência com os números normais, estão os seus logaritmos, tão simples que se podem somar ou subtraír mentalmente. As caracteristicas acrescentam-se como no cálculo com as tábuas, para se ter a posição da vírgula no resultado, o qual se obtem com um erro máximo de 3%, quando a série R 40 também for utilizada.

Em muitos casos podem-se usar as escalas NZ, interpolando ou arredondando muito à larga, por ex. tomando $\pi = 3{,}15$ ou a densidade do aço macio como $\gamma = 8$ em vez de $\gamma = 7{,}85$.

As mantissas correspondentes aos números normais (NZ) lêem-se na escala de mantissas colocada acima, sendo necessário muito cuidado com as características, de que depende, naturalmente, a correcção dos cálculos.

Em fórmulas com vários factores é aconselhável escrever os logaritmos lidos, afim de facilitar a verificação. Para os logaritmos dos números menores do que a unidade é, por vezes, preferível dar-lhes a forma de número negativo, por ex.: tomar $\log 0{,}8 = -0{,}1$ em vez de $\log 0{,}8 = 0{,}9 - 1$.

As escalas L e D permitem cálculos logarítmicos mais exactos, pois constituem uma tábua de logaritmos de 3 decimais.

22.3 Escalas logarítmicas

Para transportar com mais precisão as escalas ou quadrículas logarítmicas, a escala NZ possui graduações logarítmicas com os comprimentos de base de 200 mm, 150 mm, 100 mm, 50 mm e 25 mm. Os comprimentos de base de 125 mm e 250 mm constam da gaveta móvel de cálculo.

22.4 Factores de conversão de unidades não métricas

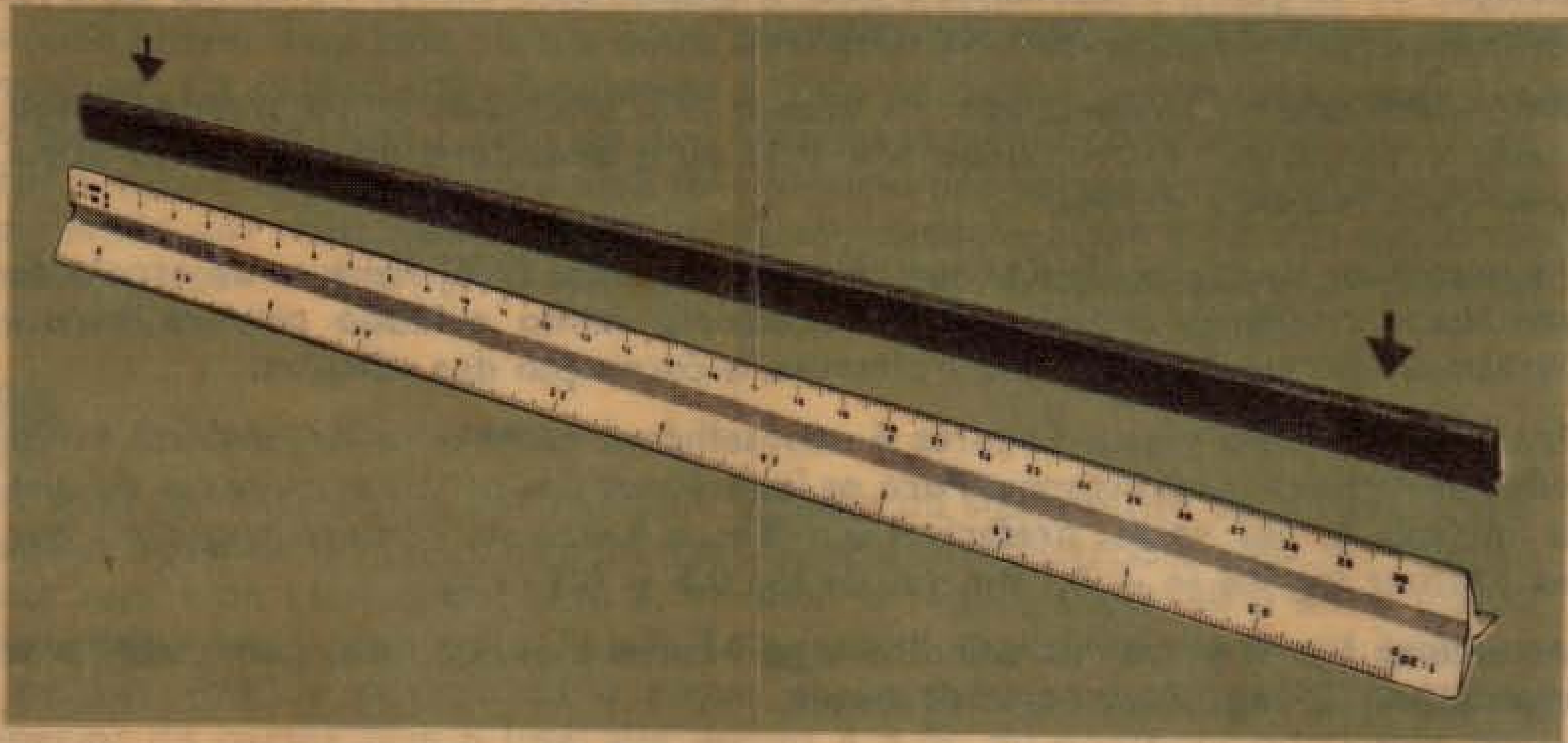
No estudo, com livros técnicos ingleses e americanos, as unidades não métricas trazem grandes dificuldades pelo trabalho de procurar as suas equivalências no sistema métrico. As tabelas da régua resolvem esse problema por conterem os principais factores de transformação. Para a sua confecção utilizou-se principalmente, o livro de U. Stille: Messen und Rechnen in der Physik (Editores Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig).

ARISTO

Escala de redução ARISTO com guia orientadora

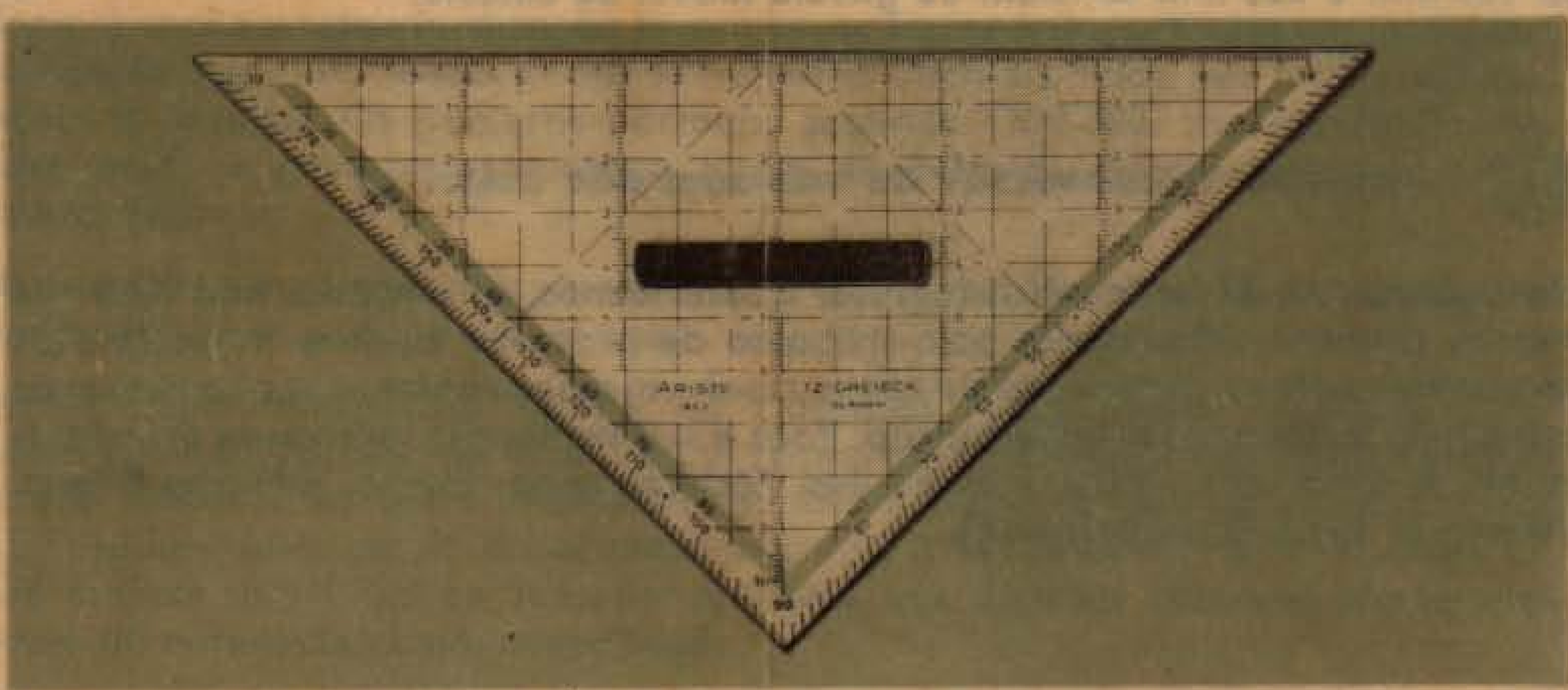
Apesar de todas as suas vantagens as escalas de redução triangulares tinham até agora uma inconveniência: Empregava-se muito tempo a virá-las até encontrar a graduação desejada. Este problema foi solucionado por ARISTO.

As escalas de redução ARISTO são equipadas, sem aumento de preço, com uma guia orientadora colorida e cambiável, que sinaliza à primeira vista a escala mais desejada. O ligeiro arredondamento da guia suaviza ao mesmo tempo o aguçado canto superior da régua, que durante o trabalho roça na mão.



Esquadro de desenho ARISTO-TZ

Este esquadro prático com um campo de aplicação infinito é feito de ARISTOPAL inquebrável e transparente. Divisões milimétricas verticais à hipotenusa e uma rede quadriculada de 1 cm facilitam o sombrear, o desenhar de paralelas, de figuras simétricas e ângulos rectos, assim como a aplicação e leitura de coordenadas. O esquadro é fornecido com a graduação em 360° ou 400^g.



PROGRAMA DE FABRICO ARISTO

Réguas de cálculo · Discos de cálculo · Escalas · Material de desenho
Planímetros · Instrumentos de gravação em películas
Coordinatógrafos de orientação manual ou numérica

Peça prospectos detalhados ao seu fornecedor de artigos de desenho

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG
2 HAMBURG 50 · ALEMANHA