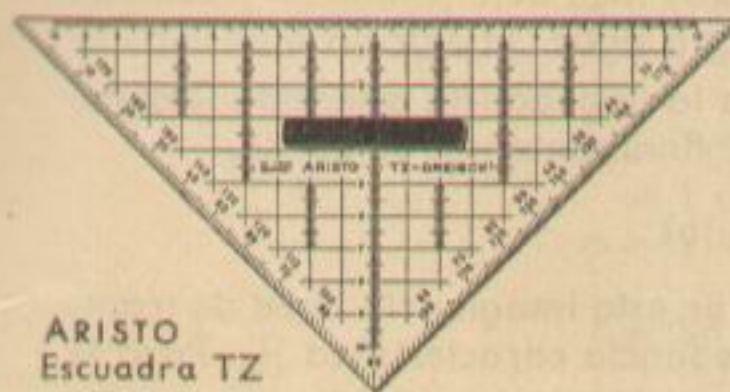
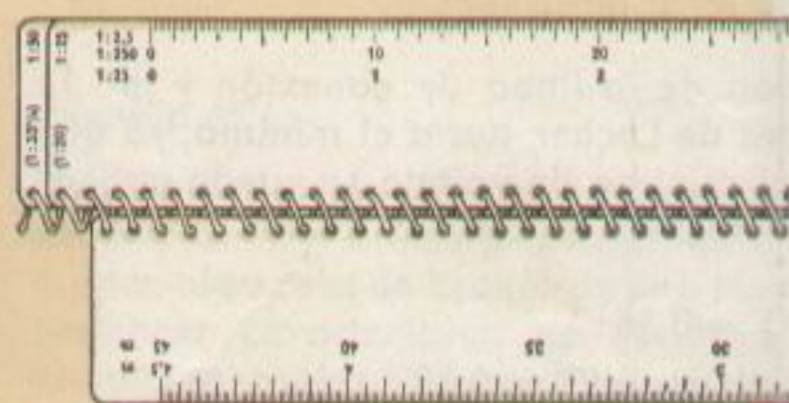


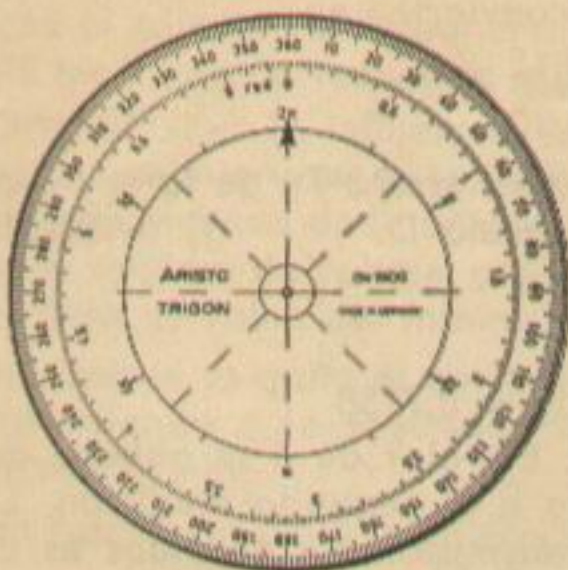
ARISTO



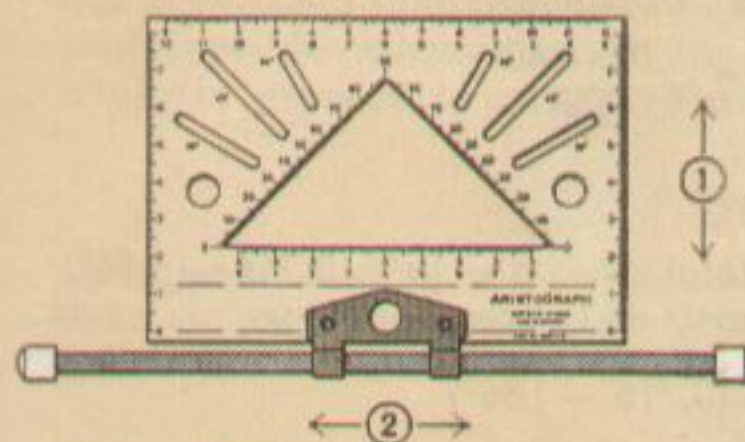
ARISTO
Escuadra TZ



Escalímetro Espiral
ARISTO



ARISTO TRIGON



ARISTOGRAPH

¡Pidanse catálogos especiales!

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG
2 HAMBURG 5) - ALEMANIA

INSTRUMENTOS DE DIBUJO

ARISTO-ESCUADRA TZ

Una escuadra muy útil para el dibujo industrial, ya que reúne en este solo instrumento, escala simétrica, regla paralela y transportador de hasta 360° ó bien 400°.

ESCALIMETRO ESPIRAL ARISTO

Este escalímetro, de ARISTOPAL blanco, consta de tres tiras de 30 cm de longitud unidas en su parte longitudinal por una espiral de plástico. Gracias al marcado múltiple de las seis escalas se han conseguido 15 reducciones en este escalímetro.

ARISTO-TRIGON

Es un transportador con división de 360° y división en radianes que sirve para medir y transportar ángulos por los dos sistemas y también para la transformación inversa de estos dos sistemas.

ARISTOGRAFO

Patente Alemana No. 952 419

Un instrumento de dibujo de ARISTOPAL transparente para el croquizado rápido y eficaz, provisto en sus bordes de una escala en milímetros y de un transportador de hasta 180°. La placa de dibujo de 85 x 130 mm se mueve paralelamente asimismo en dirección vertical, mediante un rodillo guía de 200 mm de longitud haciendo el efecto de una regla paralela (1) y desplazándose transversalmente a lo largo del rodillo (2).

PROGRAMA DE FABRICACION ARISTO

Reglas de cálculo · Calculadores circulares · Reglas graduadas · Instrumentos de dibujo · Planímetros · Aparatos cartográficos · Pequeños aparatos de topografía para la escuela y la construcción · Coordinatógrafos para la industria y la topografía.

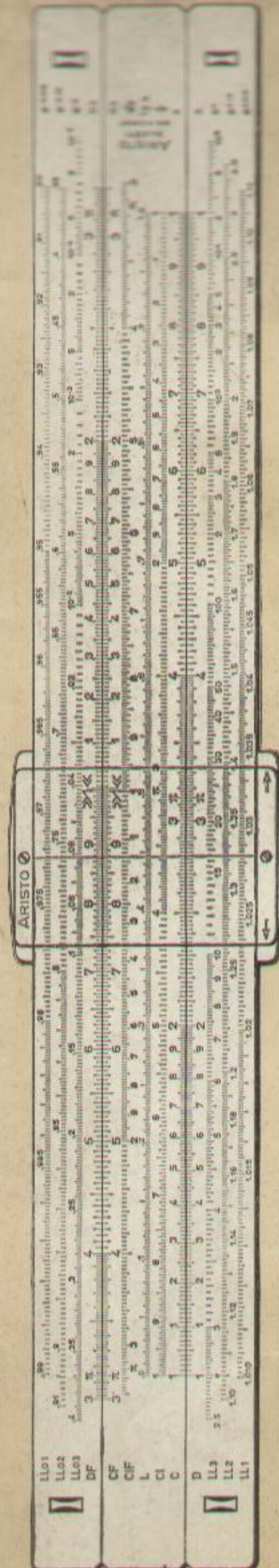
INSTRUCCIONES
PARA EL USO
DE LA REGLA
DE CÁLCULO

ARISTO

MULTILOG HYPERBOLOG

870 · 0970 · 01070 · 0971

S



INDICE

	Pagina
1.— Disposición de las escalas	
ARISTO-MultiLog	4
ARISTO-HyperboLog	6
2.— Lectura de las escalas	8
3.— Representación gráfica de los ejemplos	9
4.— Multiplicación	10
5.— División	10
6.— Multiplicación y división combinadas	10
7.— Cálculo de proporciones	11
8.— Las escalas recíprocas CI y CIF	11
9.— Las escalas desplazadas CF y DF	12
9.1.— Mejor comienzo de los cálculos	12
9.2.— Tablas sin traslado de reglilla	12
9.3.— Lectura directa de multiplicaciones y divisiones por π	13
10.— Las escalas A, B y K	13
11.— Las funciones trigonométricas	14
11.1.— Seno y coseno	14
11.2.— Tangente y cotangente	14
11.3.— La escala ST	15
11.3.1.— Angulos pequeños — ángulos grandes	15
11.3.2.— Conversión de grados en radianes y viceversa	16
11.4.— Las marcas ' y "	16
12.— Cálculo trigonométrico de triángulos planos	17
13.— Las escalas exponenciales LL	18
13.1.— Potencias y raíces de exponente 10 y 100	19
13.2.— Potencias $y = a^x$	19
13.3.— Casos especiales de $y = a^x$	21
13.4.— Potencias $y = e^x$	23
13.5.— Raíces $y = \sqrt[x]{a}$	24
13.6.— Logaritmos	24
13.7.— Cálculo de proporciones con las escalas exponenciales	26
14.— El cursor y sus marcas	28
14.1.— La marca 36	28
14.2.— Area del círculo y peso de barras de acero	28
14.3.— Las marcas kW y PS (CV)	28
14.4.— Para quitar el cursor	28
14.5.— Ajuste del cursor	29
15.— Tratamiento de la regla de cálculo ARISTO	29
16.— Las funciones hiperbólicas de la ARISTO-HyperboLog	29
16.1.— Las escalas Sh 1 y Sh 2	30
16.2.— La escala Th	30
16.3.— Fórmulas básicas de las funciones hiperbólicas	30

16.4.— Ctgh x	31
16.5.— Ch x	31
17.— Funciones hiperbólicas de argumento complejo	31
17.1.— Sh $(x + jy)$	32
17.2.— Ch $(x + jy)$	35
17.3.— Tgh $(x + jy)$	38
18.— Funciones trigonométricas de argumento complejo	38
19.— La inversión de los problemas tratados anteriormente	38
19.1.— Arg Sh $r/\varphi = x + jy$	38
19.2.— Arg Ch $r/\varphi = x + jy$	39
19.3.— Arg Tgh $r/\varphi = x + jy$	39
20.— Ejemplos de aplicación	40

Reservados todos los derechos de autor, especialmente la traducción a idiomas extranjeros
Prohibida la reproducción, aún parcial
© 1958 por ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG · O/LFL/E
Imprimido en Alemania, editorial Borek KG 4746

LA REGLA DE CALCULO *ARISTO*-MULTILOG

1. Disposición de las escalas

Anverso		En la parte superior del cuerpo	
		$e^{-0,01x}$ $e^{-0,1x}$ e^{-x} πx	
LL01	Escala exponencial, alcance 0,99—0,9	En la regilla	
LL02	0,91—0,35		
LL03	0,4—0,00001		
DF	Escala básica desplazada por π	En la parte inferior del cuerpo	
CF	Escala básica desplazada por π		
CIF	Escala recíproca de CF		
L	Escala de mantisas		
CI	Escala recíproca de C		
C	Escala básica		
D	Escala básica		
LL3	Escala exponencial, alcance 2,5—100000		
LL2	1,1—3,0		
LL1	1,01—1,11		

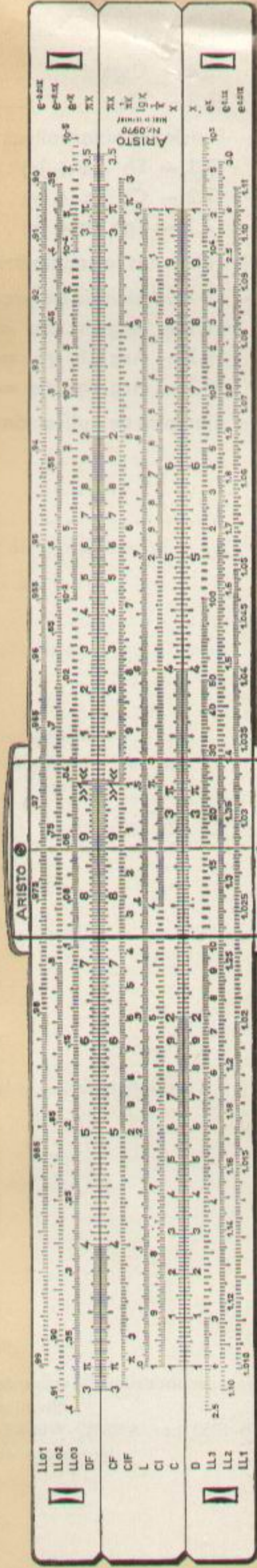


Fig. 1 Anverso 0970

La ARISTO-MultiLog es una regla de cálculo universal con escalas exponenciales, para científicos, ingenieros y estudiantes.

Reverso		En la parte superior del cuerpo	
		$e^{-0,001x}$ x^3 x^2 x^2 $\tan$ $\arcsin$ $\arccos$ $\arctan$ x x $1/x$ $e^{0,001x}$	
LL00	Escala exponencial, alcance 0,999—0,989	En la regilla	
K	Escala de cubos		
A	Escala de cuadrados		
B	Escala de cuadrados	En la parte inferior del cuerpo	
T	Escala de tangentes y cotangentes de 5,5° a 45°, en sentido inverso de 45° a 84,5°		
ST	Escala de ángulos pequeños en radianes de 0,55° a 6°		
S	Escala de senos y cosenos de 5,5° a 90°, en sentido inverso de 0° a 84,5°		
C	Escala básica		
D	Escala básica		
DI	Escala recíproca de D		
LL0	Escala exponencial, alcance 1,001—1,011		

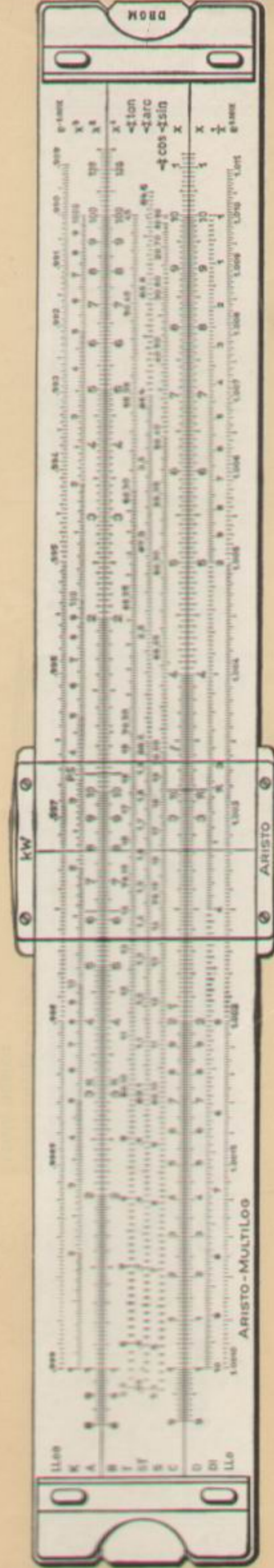


Fig. 2 Reverso 0970

LA REGLA DE CALCULO ARISTO-HYPERBOLOG 0971

LL01	Escala exponencial, alcance 0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	En la parte superior del cuerpo
LL02	0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
LL03	0,4—0,00001	e^{-x}	
DF	Escala básica desplazada por π	πx	En la regilla
CF	Escala básica desplazada por π	πx	
CIF	Escala recíproca de CF	$1/\pi x$	
L	Escala de mantisas	$\lg x$	En la parte inferior del cuerpo
CI	Escala recíproca de C	$1/x$	
C	Escala básica	x	
D	Escala básica	x^x	En la parte inferior del cuerpo
LL3	Escala exponencial, alcance 2,5—100000	$e^{0,1x}$	
LL2	1,1—3,0	$e^{0,1x}$	
LL1	1,01—1,11	$e^{0,01x}$	

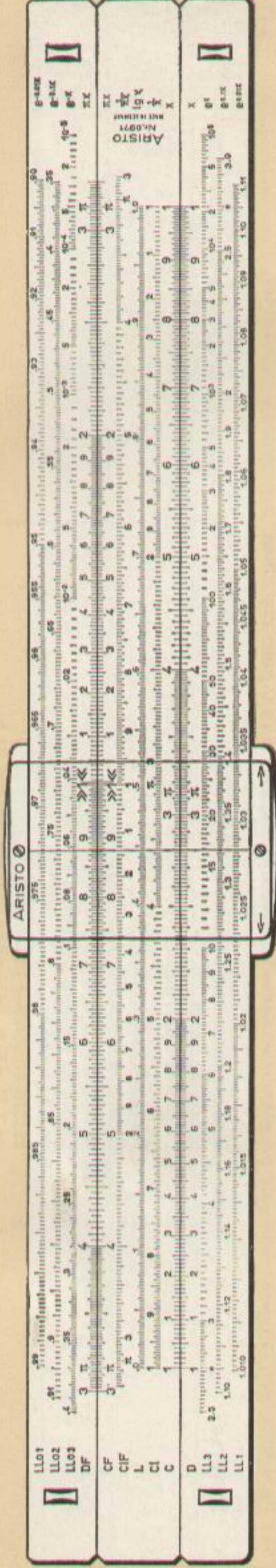


Fig. 3 Anverso 0971

Las escalas de la regla de cálculo ARISTO-HyperboLog y su disposición son muy parecidas a la ARISTO-MultiLog. En el anverso la identidad es total, mientras que en el reverso las escalas LL0 y LL00 de la ARISTO-MultiLog han sido substituidas por las Sh 1, Sh 2 y Th en la ARISTO-HyperboLog. Por tal motivo el manejo de ambas reglas de cálculo se trata en un solo folleto. Cuando sea necesario el texto ya hará mención de la diferencias.

Reverso	Th	En la parte superior del cuerpo
K		$\tan h$
A		x^3
B		x^2
T		x^2
		$\tan$
ST		$\arcsin$
		$\sin$
S		x
C		x
D		$1/x$
DI		$\sinh$
Sh 2		$\sinh$
Sh 1		

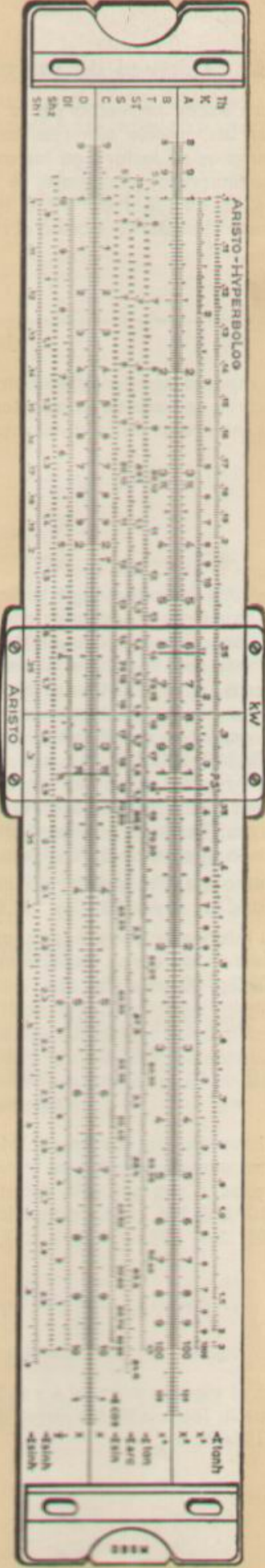
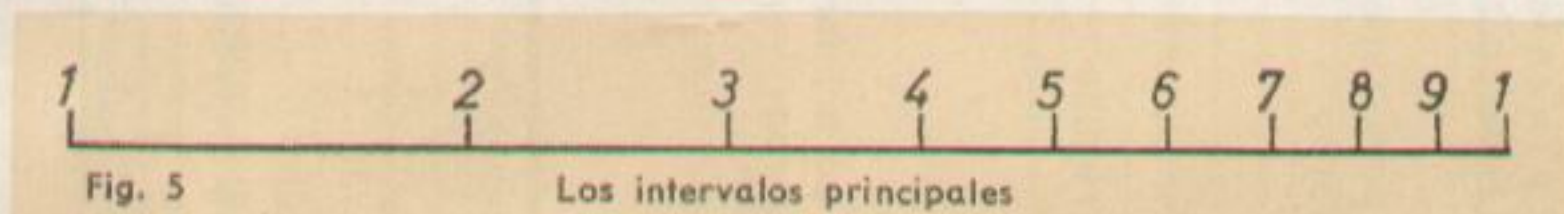


Fig. 4 Reverso 0971

2. Lectura de las escalas

Para sacar provecho de la regla de cálculo es muy importante aprender a leer las escalas con rapidez y seguridad. Las figuras 5—8 muestran varios ejemplos de lectura en las escalas básicas C y D que son las más empleadas. Los intervalos principales se han marcado con rayas largas y cifras del 1 al 10 (fig. 5). En lugar del 10 se ha puesto de nuevo el 1, ya que esta última raya puede considerarse como el comienzo de una nueva escala idéntica a la anterior.



El espacio comprendido entre las cifras 1 y 2 se subdivide de forma parecida a como se hace en las escalas milimétricas, con la única diferencia de que aquí los intervalos entre divisiones van disminuyendo hacia la derecha.



La cifra 2 de una regla milimétrica significa 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m, etc.; de la misma manera las cifras de la escala de la regla de cálculo no dan indicación alguna del lugar donde ha de colocarse la coma. Por esta razón es aconsejable leer una sucesión de cifras sin coma, expresándolas individualmente, p. ej. uno-tres-cuatro y no ciento treinta y cuatro. Para ejercitarse en la lectura conviene mover lentamente la raya del cursor desde el valor 1 hacia la derecha, y leer sobre cada división: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, etc.

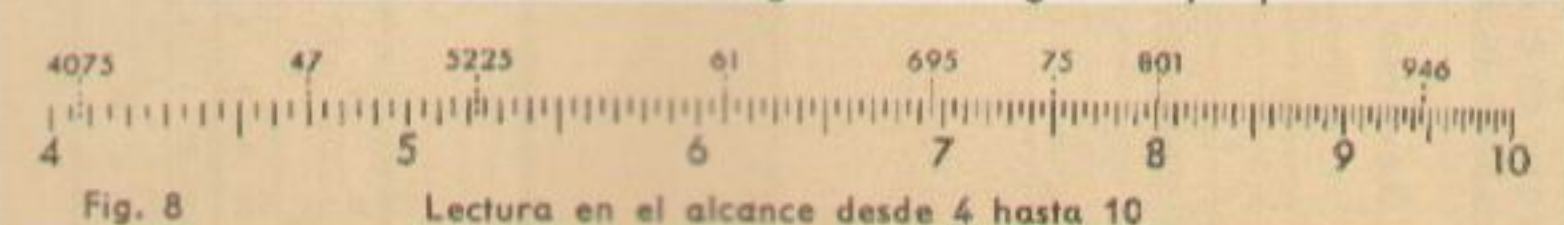
La raya del cursor es tan delgada en comparación con el ancho de los intervalos que puede colocarse con toda seguridad en el centro del intervalo entre rayas. También pueden distinguirse a simple vista fracciones de intervalo, de modo que después de alguna práctica puede apreciarse hasta la décima parte.

Como ejercicio puede moverse el cursor lentamente de izquierda a derecha, entre las rayas 131,0 y 132,0 apreciando 131,1; 131,2; 131,3; 131,4; 131,5 etc.

Al interpolar entre dos rayas numeradas debe ponerse especial cuidado en no olvidar los ceros, especialmente al principio de la escala, p.ej. 100,0; 100,1; 100,2; 100,3 etc. (fig. 6).



Como sea que los intervalos a la izquierda de la cifra 2 son ya muy pequeños, a su derecha y entre las cifras 2 y 4 solo se ha grabado el segundo de cada dos trazos, o sea que solo deben atribuirse valores pares: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, etc. La mitad de cada intervalo representa los valores impares: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, etc. La figura 7 da algunos ejemplos de lectura.



En el espacio entre el 4 y el 10 los trazos dan intervalos de 5 unidades, de modo que la lectura de las rayas divisorias sucesivas es aquí: 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430, etc.

Los valores intermedios pueden apreciarse teniendo en cuenta que la mitad entre 400 y 405 es el valor 4025 y un poco a su izquierda el 402. Asimismo la mitad del siguiente intervalo es el valor 4075. La figura 8 presenta unas cuantas lecturas.

El cálculo con la regla de cálculo corresponde a una suma o resta mecánica de segmentos. El principio en que se basa puede entenderse fácilmente con dos reglas graduadas milimétricas que se hacen deslizar una frente a otra.



La figura 9 presenta como ejemplo $2 + 3 = 5$. Si el extremo inicial de la regla superior se coloca sobre el valor 2 de la regla inferior, es posible añadirle 3 por medio de la regla graduada superior. En efecto, debajo del número 3 de esta regla, y en la inferior, se lee 5 que es el resultado. En la misma figura 9 se puede leer también $2 + 1 = 3$, o, contando en milímetros $20 + 15 = 35$.

La figura 9 sirve también para ilustrar la substracción $5 - 3 = 2$, procediendo en sentido inverso. Del segmento 5 de la escala inferior se resta el segmento 3 de la escala superior, para lo cual se colocan los valores 5 y 3 uno sobre el otro y debajo del extremo inicial de la escala superior se halla el resultado 2, leído en la escala inferior.

En la regla de cálculo unas escalas se hallan sobre el cuerpo fijo y otras sobre una reglilla deslizable. Las escalas de la regla de cálculo no son lineales sino logarítmicas. De esta forma la adición de segmentos es una suma de logaritmos y por lo tanto una multiplicación de los correspondientes números; de igual modo la substracción de segmentos es una división.

3. Representación gráfica de los ejemplos

Para mostrar la sucesión de operaciones a realizar con la regla de cálculo para la resolución de cada ejemplo se utilizará una representación gráfica convencional o esquema, mucho más expresivo que una fotografía de la misma regla de cálculo. Las escalas vienen representadas por líneas horizontales paralelas en cuyos extremos se halla su denominación abreviada. El cuadro de símbolos que sigue facilita la lectura de los esquemas:

Posición de partida o inicial

Posiciones intermedias

Resultado final

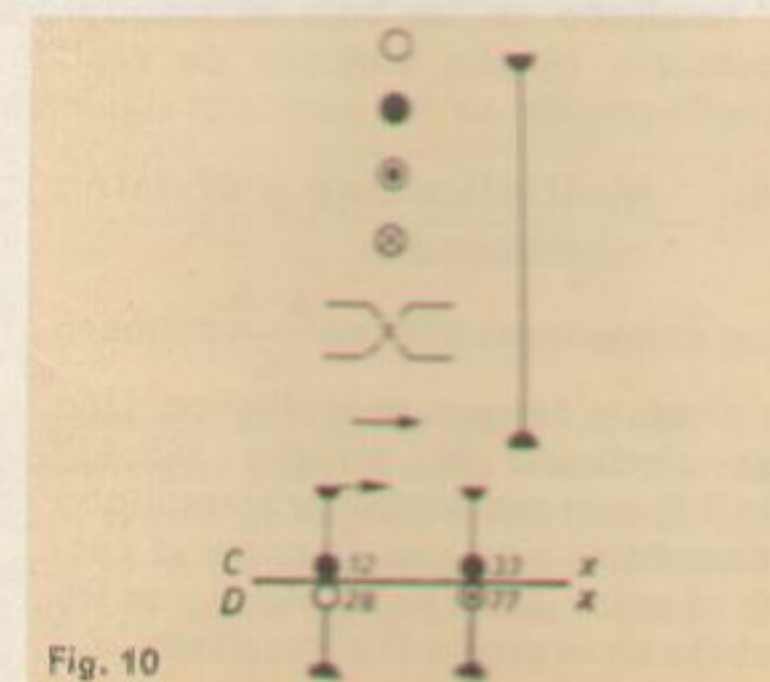
Posición ocasional o lectura de un resultado intermedio

Dar la vuelta a la regla de cálculo

Las flechas indican la sucesión de operaciones y la dirección del movimiento

Una raya vertical representa el cursor
Sirva como ilustración un ejemplo

sencillo: $\frac{28}{12} \cdot 33 = 77$ (fig. 10)



4. Multiplicación

(Suma de dos segmentos)

El 1 del principio de la reglilla (escala C) se coloca sobre el valor 18 de la escala D. Llevando el cursor al valor 13 de la escala C, se sumarán los segmentos 13 y 18, resultando bajo la raya del cursor y en la escala D, el resultado 234. La posición de la coma se determina mediante un cálculo de memoria con números redondos $20 \cdot 10 = 200$.

El producto $18 \cdot 7,8$ no puede realizarse con la posición del esquema anterior, sino que es necesario realizar un traslado de la reglilla o sea colocar sobre el 18 de la escala D, no el extremo inicial de la C, sino el final. En las reglas de cálculo ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperboLog puede evitarse este inconveniente continuando el cálculo con las escalas superiores CF y DF.

Las escalas CF y DF hacen más fácil el cálculo, porque son una repetición de las escalas básicas C y D, desplazadas con relación a éstas de tal modo, que el 1 viene a quedar aproximadamente en el centro de la regla de cálculo, obteniendo así una prolongación de las escalas en la mitad de su longitud. Cuando, por ejemplo, en el par inferior de escalas se halla el 1 de la C frente al 18 de la D, también el 1 de la CF está frente al 18 de la DF.

Ya que la escala C se desliza sobre la D, pero la CF bajo la DF, el fondo de las escalas C y CF de la reglilla va coloreado de amarillo con el fin de evitar errores de ajuste y de lectura (véase cap. 9).

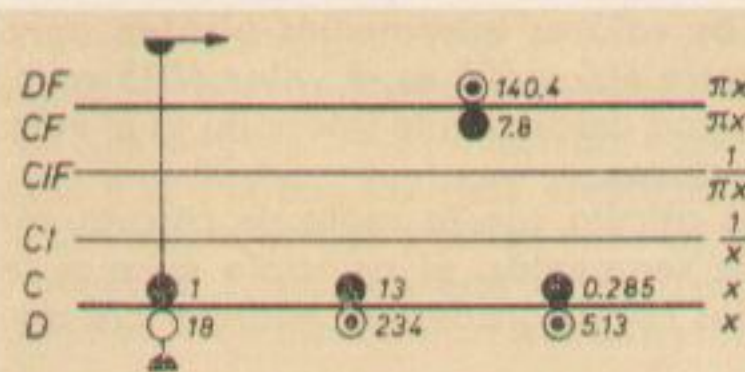


Fig. 11 $18 \cdot 13 = 234$
 $18 \cdot 0,285 = 5,13$
 $18 \cdot 7,8 = 140,4$

5. División

(Substracción de dos segmentos o inverso de la multiplicación)

La raya del cursor se coloca sobre el valor 2620 de la escala D y se mueve la reglilla hasta que el valor 17,7 de la escala C coincida con la raya del cursor, o sea que ambos valores queden uno bajo el otro. El resultado 148 se lee debajo del principio o 1 de la escala C de la reglilla; o en el caso de que el 1 de la escala C cayera fuera de la escala D, se lee entonces debajo del final o 10 de la escala C. Naturalmente el resultado también puede leerse sobre el 1 de la escala CF, en la escala DF.

La posición de la reglilla resulta la misma que para la multiplicación $148 \cdot 17,7 = 2620$. La única diferencia entre multiplicación y división es la secuencia de operaciones. Después de colocar la reglilla para la división, el resultado se lee bajo el principio o bajo el final de la escala C y no es necesario ningún traslado de reglilla. Esta particularidad se aprovechará repetidamente en los capítulos siguientes.

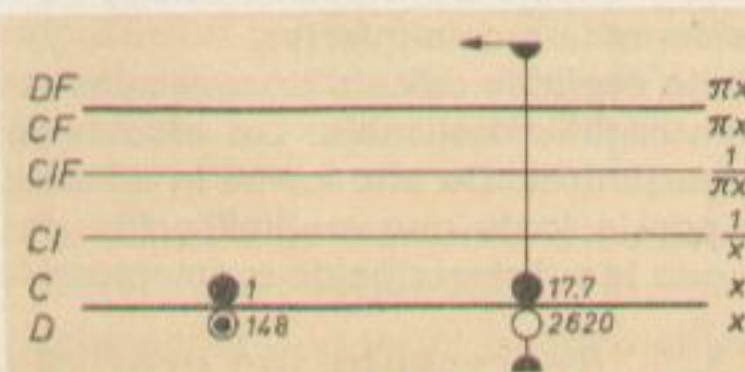


Fig. 12 $2620 : 17,7 = 148,0$
 Tanteo $3000 : 20 = 150$

6. Multiplicación y división combinadas

Con expresiones del tipo $\frac{a \cdot b}{c}$ primero se divide y después se multiplica. Una vez efectuada la división $345:132$ (fig. 13) no es necesario leer el resultado intermedio; sino que se corre el cursor al valor 22 de la escala C y se lee debajo en la escala D el resultado 57,5.

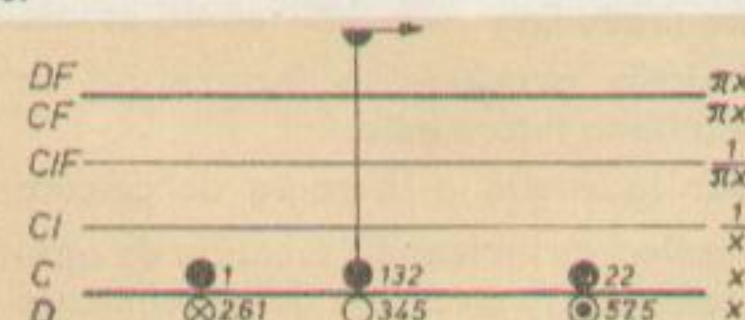


Fig. 13 $\frac{345}{132} \cdot 22 = 57,5$
 Tanteo: $\frac{300}{100} \cdot 20 = 60$

7. Cálculo de proporciones

Los cálculos en forma de proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots$ se realizan de manera muy fácil con la regla de cálculo, porque colocada una de las relaciones, pueden leerse todas las demás con solo mover el cursor. La separación entre la escala del cuerpo y la escala de la reglilla viene a ser como la raya de fracción. Esta forma de calcular es tan sencilla que debe preferirse siempre que sea posible.

Ejemplo:

9,5 kg de una mercancía valen 6,30 pts. ¿Cuánto cuestan 8,4 kg, 10,6 kg, etc.? Se colocan, uno enfrente de otro, el peso dado 9,5 en la escala DF y el precio 6,30 en la escala CF. En las escalas CF/DF y C/D tendremos ahora todos los pesos y precios (uno enfrente de otro) cuyo cociente es idéntico al colocado:

$$\frac{\text{kg}}{\text{pts.}} = \frac{9,5}{6,3} = \frac{8,4}{5,57} = \frac{10,6}{7,03} = \frac{3,8}{2,52} = \frac{2,8}{1,858} = \frac{1}{0,663} = \dots$$

Resulta indiferente dónde y cómo se encuentran uno enfrente de otro los valores de kg y pts., mientras se tenga cuidado de poner los pesos allí donde se puso el primer peso y leer los correspondientes precios en la escala colocada enfrente.

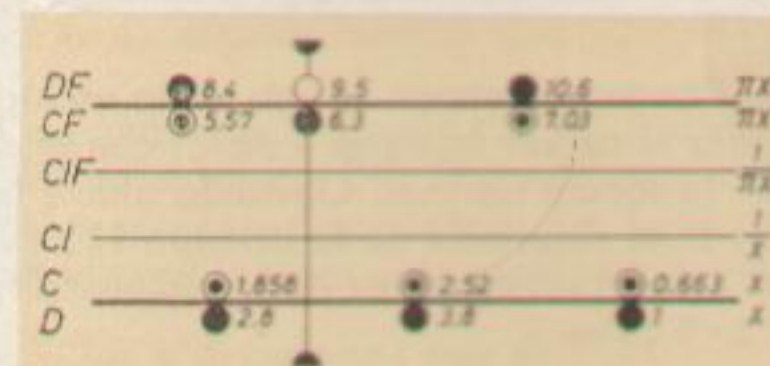


Fig. 14

8. Las escalas recíprocas CI y CIF

La escala CI está dividida de igual forma que las escalas básicas C y D, salvo que transcurre de derecha a izquierda y lleva numeración roja para evitar errores en la lectura.

Colocando el cursor en cualquier valor de la escala C, puede leerse su recíproco $1/x$ en la escala CI, como indica el símbolo colocado en el extremo derecho de la escala. Encima del 5 de C se encuentra $1/5 = 0,2$ en CI. Es importante notar que la formación de recíprocos vale también en sentido inverso, es decir en el sentido de CI a C; p. ej. debajo del valor 4 de CI se encuentra el valor $1/4 = 0,25$ en C.

La lectura ocasional de valores recíprocos no justificaría la presencia de CI. Su misión principal consiste en que ahorra muchas colocaciones o movimientos superfluos en los cálculos complejos.

$$\frac{4}{5} \text{ puede escribirse } 4 \cdot \frac{1}{5} \text{ y por ello } 4 \cdot 5 \text{ es igual que } \frac{4}{1/5}$$

Esta forma de escribir resulta mas bien rara, pero, para el cálculo con la regla de cálculo, presenta la ventaja de poder convertir una división en multiplicación y, viceversa, una multiplicación en división. Un "juego" con números sencillos nos mostrará mejor la utilidad de esta transformación:

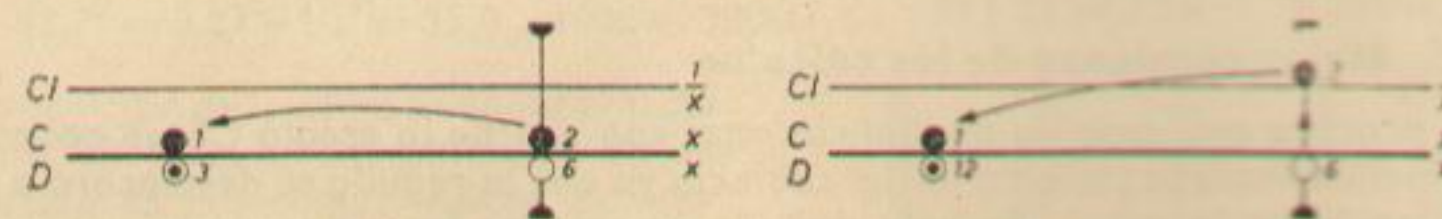
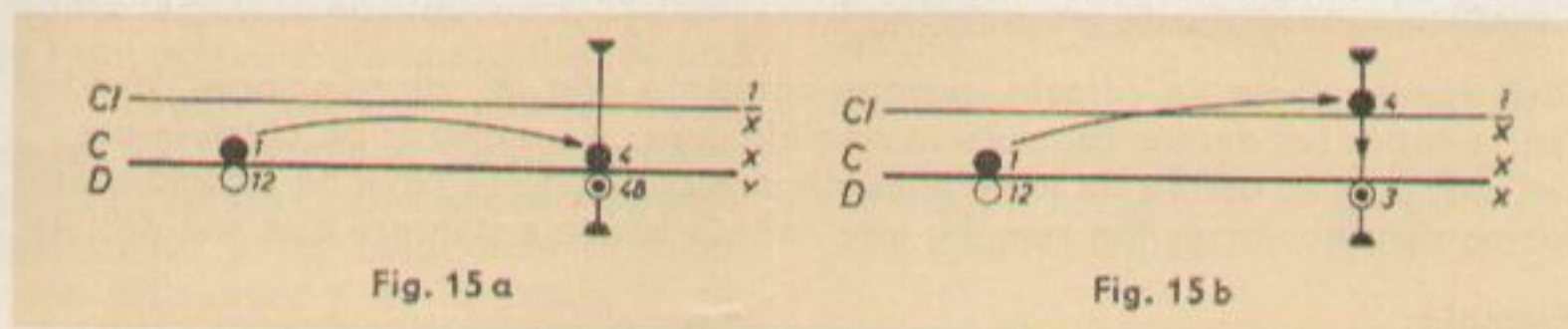


Fig. 14a

Fig. 14b

1. Llevando el cursor sobre el 6 de D y moviendo la reglilla hasta colocar el 2 de C bajo la raya del cursor, realizamos la división $6:2 = 3$ de la forma normal. Dejando el cursor en su sitio, desplazemos ahora la reglilla hasta situar bajo la raya del cursor el 2 de la escala CI, con lo que efectuamos la multiplicación $6 \cdot 2$, cuyo resultado 12 se lee bajo el 1 de la reglilla como en una división. En

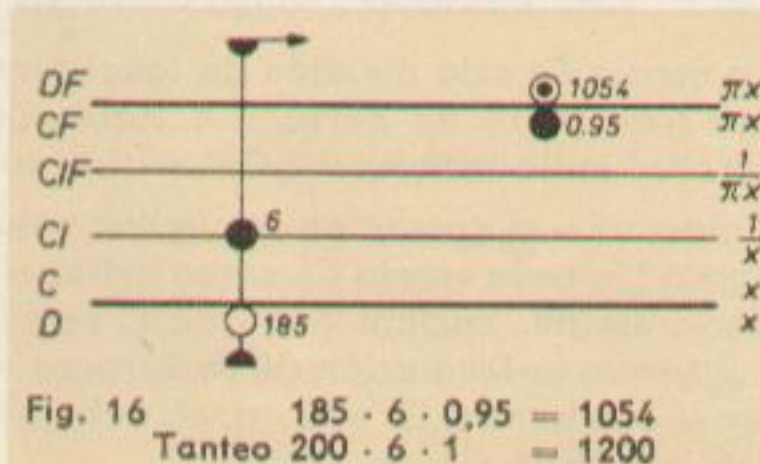
realidad lo que hemos efectuado es la división $6:0,5$, dado que al llevar el 2 de CI bajo el cursor, llevamos al mismo tiempo el 0,5 de C (fig. 14b).



2. Pongamos ahora el uno de la escala C sobre el 12 de D y traslademos después el cursor hasta el 4 de C; con ello se obtiene la multiplicación $12 \cdot 4 = 48$ de la forma normal. Llevando ahora el cursor sobre el 4 de CI, podemos leer en D el resultado de la división $12:4 = 3$ (fig. 15b). Con otras palabras: bajo el 4 de CI está en C su valor recíproco $1/4 = 0,25$ y en realidad hemos calculado $12 \cdot 0,25 = 3$.

Por tanto existen para la multiplicación y división, dos posibilidades de colocación, de las cuales el calculador hábil escogerá en cada caso la mejor, con el fin de obtener, en un cálculo complejo, divisiones y multiplicaciones alternadas. Las relaciones hasta aquí descritas entre las escalas C y CI, valen de igual forma para las CF y CIF. Para darse cuenta de ello resulta útil repetir el "juego de números" anterior con el grupo de escalas CF/DF/CIF. Quien haya estudiado atentamente lo que precede, reconocerá ahora que la escala CIF es un complemento consecuente del sistema de escalas. Y quién se aproveche de las ventajas de las escalas desplazadas, usará la escala CIF con tanta frecuencia como la escala CI.

Fórmulas del tipo $a \cdot b \cdot c$ y $\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$ se resuelven alternando multiplicación y división como en el caso de multiplicación y división combinadas (cap.6). Durante el cálculo puede pasarse del grupo de escalas C, D y CI al CF, DF y CIF, con lo cual se evitan traslados de reglilla.



En el ejemplo de la fig. 16 se han colocado, uno enfrente de otro, el 185 de la escala D y el 6 de la CI como para una división, continuando con la multiplicación por 0,95 mediante la escala superior CF. El resultado 1054 aparece encima del anterior número, en la escala DF.

9. Las escalas desplazadas CF y DF

En el capítulo precedente ya se han realizado cálculos con estas escalas, aquí resumiremos, una vez más, las ventajas de estas escalas.

9.1 Mejor comienzo de los cálculos

Si se procura empezar las multiplicaciones con el 1 de la escala CF, se obtiene automáticamente la posición inicial correcta ya que la reglilla se desplazará a lo máximo hasta la mitad. Para la división se colocan los valores uno sobre el otro, como ocurre en un quebrado.

9.2 Tablas sin traslado de reglilla

La prolongación de las escalas en la mitad de su longitud da por resultado una mayor facilidad para multiplicaciones, cálculo de tablas y proporciones, dado que evita los traslados de reglilla.

Ejemplo de formación de una tabla:
 $y = 29x$

x	1	1,7	3,45	5,0	10
y	29	49,3	100	145	290



El 1 de la escala CF y el 1 de la escala C señalan siempre el mismo valor en sus escalas vecinas, por lo que ambos pares de escalas forman una unidad de trabajo.

El valor correspondiente a $x = 5$ puede colocarse en la escala CF, sin traslado de reglilla y leer el resultado $29 \cdot 5 = 145$ en la escala DF. El fondo amarillo de las escalas de la reglilla previene posibles errores, recordando que, también arriba, el multiplicador 5 debe colocarse en la reglilla o sea en la escala amarilla.

9.3 Lectura directa de multiplicaciones y divisiones por π

Para la formación o cálculo de tablas solo es necesario que el 1 de las escalas desplazadas esté aproximadamente hacia la mitad de la regla. El valor exacto de este desplazamiento se ha escogido de tal forma que encima del 1 de la escala D se encuentre el valor π de la escala DF, lo cual también sucede para las escalas C y CF. Este factor nada tiene que ver con las aplicaciones precedentes, pero proporciona una ventaja adicional, dado que al pasar de D a DF o bien de C a CF se realiza una multiplicación por π y haciéndolo en sentido inverso se realiza una división por π . Cuando, p. ej., se coloca el cursor en el diámetro d de la escala D, puede leerse encima, en la escala DF, la superficie del círculo $C = d \cdot \pi$. De forma parecida se calcula la velocidad angular $\omega = 2 f \pi$, colocando $2 f$ en D.

En todos los cálculos en que interviene el número π como factor, se deja éste para el final, teniendo en cuenta que basta un traspaso a las escalas desplazadas.

La fig. 18 muestra una recopilación de todos los cálculos con el factor π que pueden realizarse con una sola posición del cursor.

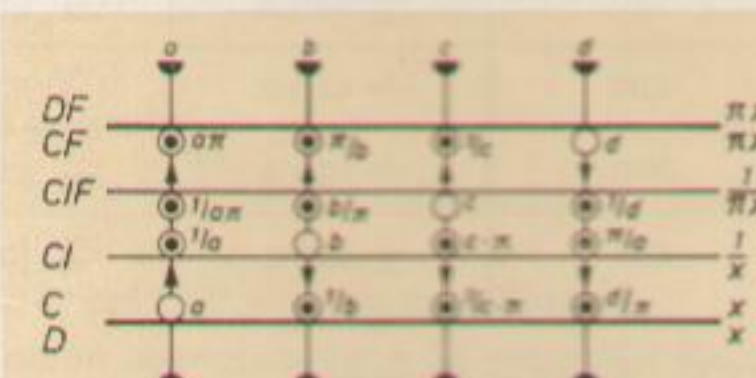


Fig. 18 Cálculos con π

10. Las escalas A, B y K

Si la raya del cursor se coloca sobre un valor cualquiera x de la escala C, se puede leer su cuadrado x^2 en la escala B y su cubo x^3 en la escala K. Operando en sentido inverso se obtendrá la raíz cuadrada y la raíz cúbica.

Ejemplos:

a) $2^2 = 4$ $2^3 = 8$
b) $32,7^2 = 3,27^2 \cdot 10^2 = 10,70 \cdot 100 = 1070$
 $32,7^3 = 3,27^3 \cdot 10^3 = 35,0 \cdot 1000 = 35000$

c) $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt[3]{27} = 3$
d) $\sqrt{51} = 7.14$ $\sqrt[3]{364} = 7.14$

La posición de la coma se deduce mediante un cálculo aproximado. En el cálculo de potencias y raíces, es ventajoso separar potencias de 10 hasta obtener un número cuyo resultado sea estimable fácilmente. Al hacer esto conviene recordar que la escala de cuadrados va desde 1 hasta 100 y la de cubos de 1 a 1000. De esta forma resulta mucho más fácil saber donde ha de colocarse el cursor.



Fig. 19 Potencias y raíces

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{3200} = \sqrt[3]{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt[3]{32} = 10 \cdot 5,66 = 56,6$$

$$\sqrt[3]{0,1813} = \sqrt[3]{\frac{181,3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181,3} = \frac{1}{10} \cdot 5,66 = 0,566$$

Con las escalas de cuadrados A y B se puede calcular igual que con las escalas básicas, aunque con menor precisión. En muchos cálculos que comienza elevando al cuadrado uno o varios números, resulta más cómodo continuar el cálculo con las escalas A y B.

11. Las funciones trigonométricas

Para cada colocación de un ángulo en las escalas S, T o ST puede leerse la correspondiente función en la escala básica C. Procediendo de manera inversa, la colocación de la función en la escala básica permite hallar el ángulo correspondiente.

En la colocación del valor del ángulo es preciso atender a que las escalas están divididas en grados y décimas de grado. Dado que la subdivisión cambia, como ocurre con las escalas básicas, debe tenerse siempre idea muy clara del valor del intervalo menor.

La regla de cálculo da solo funciones para los ángulos del primer cuadrante. En la tabla que sigue se hallan reunidas las equivalencias de cualquier ángulo al primer cuadrante:

	$\pm \alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
sen	$\pm \text{sen } \alpha$	$+\text{cos } \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$
cos	$+\text{cos } \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$\pm \text{sen } \alpha$
tan	$\pm \text{tan } \alpha$	$\mp \text{cot } \alpha$	$\pm \text{tan } \alpha$	$\mp \text{cot } \alpha$
cot	$\pm \text{cot } \alpha$	$\mp \text{tan } \alpha$	$\pm \text{cot } \alpha$	$\mp \text{tan } \alpha$

11.1 Seno y Coseno

La escala de senos comprende valores desde $5,5^\circ$ hasta 90° y está numerada para cosenos en sentido inverso desde 0° hasta $84,5^\circ$ (numeración roja). Todos los valores de senos y cosenos se leen en la escala básica c, dividiendo por 10 o sea que empiezan siempre por 0, ...

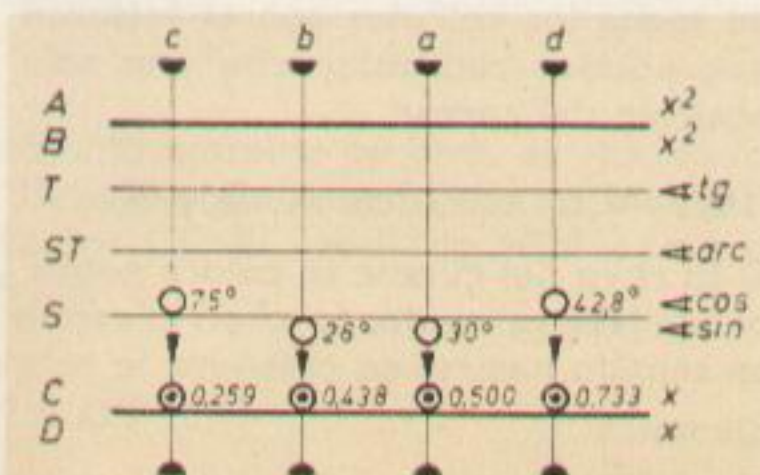


Fig. 20 Seno y coseno

Ejemplos: a) $\text{sen } 30^\circ = 0,500$
b) $\text{sen } 26^\circ = 0,438$

c) $\text{cos } 75^\circ = 0,259$
d) $\text{cos } 42,8^\circ = 0,733$

11.2 Tangente y cotangente

La escala de tangentes lleva una numeración negra desde $5,5^\circ$ hasta 45° y en sentido inverso una numeración roja desde 45° hasta $84,5^\circ$. Cuando el ángulo se lea con cifras negras, la tangente debe leerse en la escala C (también negra) y su valor comienza por 0, ...

Dado que $\text{tan } \alpha = 1/\text{tan } (90^\circ - \alpha)$, la función tangente para valores de ángulos en rojo, $\alpha > 45^\circ$ puede leerse ya sea en la escala CI o, estando la reglilla en su posición básica, también en la escala DI. Por lo tanto la escala de recíprocos sirve desde $\text{tan } 45^\circ = 1$ hasta $\text{tan } 84,29^\circ = 10$.

a) $\text{tan } 14^\circ = 0,249$
a) $\text{cot } 14^\circ = 4,01$
b) $\text{tan } 81,4^\circ = 6,61$
c) $\text{cot } 68,25^\circ = 0,399$

De acuerdo con la fórmula

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

las cotangentes se leen como valores recíprocos de las tangentes. Por ello las cotangentes de ángulos $\alpha < 45^\circ$ se encuentran en la escala CI o DI y para ángulos $\alpha > 45^\circ$ en la escala C.

Advertencia: Para colocaciones y lecturas de tangentes se usan escalas del mismo color; para las cotangentes, función y ángulo se encuentran en escalas de distinto color.



Fig. 21 Tangente y cotangente

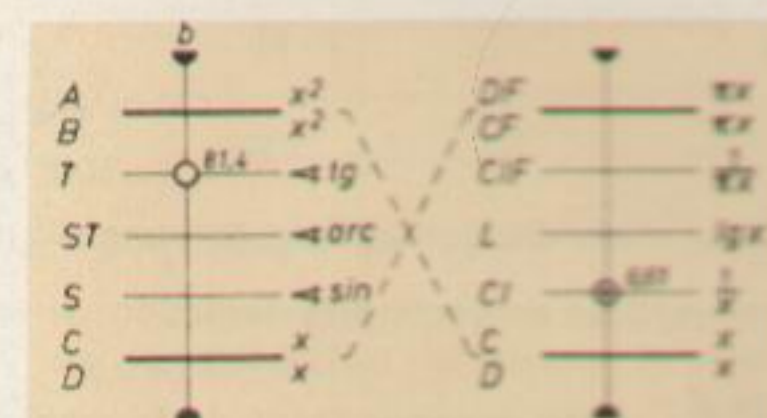


Fig. 22 Lectura en la escala CI

11.3 La escala ST

Esta escala es una continuación de las escalas S y T para valores de la función comprendidos entre 0,01 y 0,1; pero llena también el importante cometido de convertir grados en radianes.

11.3.1 Ángulos pequeños — ángulos grandes

Cuando se buscan $\text{sen } \alpha$ y $\text{tan } \alpha$ para $\alpha < 5,5^\circ$ o bien $\text{cos } \alpha$ y $\text{cot } \alpha$ para $\alpha > 84,5^\circ$, valen las aproximaciones:

$$\text{sen } \alpha \approx \text{tan } \alpha \approx \text{cos } (90^\circ - \alpha) \approx \text{cot } (90^\circ - \alpha) \approx \alpha \text{ (radianes)}$$

Para ángulos de hasta 4° esta aproximación corresponde a la precisión de la regla de cálculo. Para ángulos mayores la diferencia entre seno y tangente se hace apreciable, como se ve colocando $\text{sen } 5,5^\circ$ y $\text{tan } 5,5^\circ$ en las escalas S, T y ST. Dado que el valor del arco (en radianes) es intermedio entre el seno y la tangente, la escala ST se ha calculado y numerado de manera que colocando en ella un ángulo en unidades fundamentales (en grados) se puede leer el valor del arco en radianes en la escala C y precisamente en el margen 0,01 a 0,1.

Para hallar las cofunciones $\text{cos } \alpha$ y $\text{cot } \alpha$ de ángulos $84^\circ < \alpha < 89,45^\circ$ se coloca en la escala ST el ángulo complementario $90^\circ - \alpha$ y el valor de la función se lee en la escala C.

Ejemplos: $\text{sen } 1^\circ = 0,01745$ $\text{cos } 87^\circ = \text{sen } (90 - 87^\circ) = \text{sen } 3^\circ = 0,0523$
 $\text{tan } 2^\circ = 0,0349$ $\text{cot } 86,3^\circ = \text{tan } (90 - 86,3^\circ) = \text{tan } 3,7^\circ = 0,0646$

Los valores de cosenos para ángulos $< 10^\circ$ y los correspondientes de senos para ángulos $> 80^\circ$ no se obtienen con buena precisión mediante la escala S. Se pueden conseguir valores más precisos mediante la siguiente aproximación:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (\alpha \text{ en radianes})$$

$$\cos 1^\circ \approx 1 - \frac{0,01745^2}{2} = 1 - 0,000152 = 0,999848$$

Colocando el ángulo en la escala ST ya se halla en la escala A el valor de α^2 en radianes, el cual se divide por 2 mediante la escala B. Para hallar el ángulo correspondiente a un coseno, se procede en sentido inverso.

11.3.2 Conversión de grados en radianes y viceversa

Para un ángulo colocado en la escala ST se halla el ángulo en radianes en la escala C. El cálculo es reversible entrando por la escala C y pasando a la ST. Este método de cálculo no solo sirve para los ángulos pequeños inscritos, sino que gracias a la subdivisión decimal es igualmente válido para todos los ángulos,

dado que el cálculo $\text{arc } \alpha = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$ solo consta de una única multiplicación por

el factor constante $\frac{\pi}{180} = 0,01745$, el cual corresponde a la colocación de la escala ST frente a la C. La colocación de un ángulo α en la escala ST puede ser igualmente como $0,1 \alpha$, 10α , 100α , etc., realizando igual cambio de coma en la lectura del arco en radianes

p. ej.

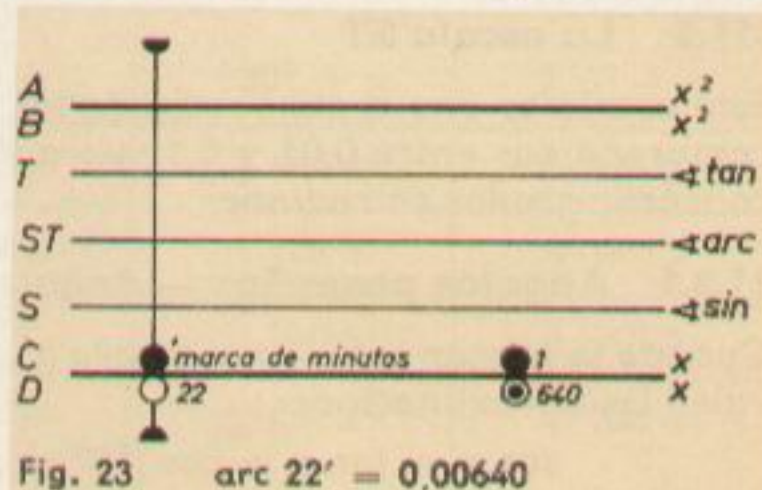
$$\begin{aligned} 1^\circ &= 0,01745 \text{ radianes} \\ 0,1^\circ &= 0,001745 \text{ radianes} \\ 10^\circ &= 0,1745 \text{ radianes} \\ 100^\circ &= 1,745 \text{ radianes} \end{aligned}$$

En el caso de que el ángulo venga dado en minutos o segundos, estos deben convertirse en decimales de grado: $1' = \frac{1^\circ}{60}$ y $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$

11.4 Las marcas ' y '' de la escala C brindan la posibilidad de convertir directamente los minutos y segundos en radianes, ya que corresponden a los factores

$$\frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \text{ para los minutos}$$

$$\frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206\,265 \text{ para los segundos}$$



Con ello tendremos $\text{arc } \alpha = \frac{\alpha'}{\text{marca de minutos}'} = \frac{\alpha''}{\text{marca de segundos}''}$

Y de manera inversa $\alpha' = \text{arc } \alpha \cdot \text{marca de minutos}'$
 $\alpha'' = \text{arc } \alpha \cdot \text{marca de segundos}''$

Ejemplos:

$$\text{arc } 22' = \frac{22}{3438} = 0,00640 \text{ radianes} \quad \text{Cálculo aproximado: } \frac{20}{3000} = 0,007$$

$$\text{arc } 380'' = \frac{380}{206\,265} = 0,001843 \text{ radianes} \quad \text{Cálculo aproximado: } \frac{400}{200\,000} = 0,002$$

$$0,0045 \text{ radianes} = 0,0045 \cdot 3438 = 15,48' \quad \text{Cálculo aproximado: } 0,005 \cdot 3000 = 15$$

Cuando se da la relación entre el radio r , el arco b y el ángulo central α adquieren toda su utilidad las marcas de minutos ' y la de segundos '' (que en las fórmulas siguientes se designan por ϱ)

$$\alpha = \frac{b}{r} \varrho \quad b = \frac{\alpha r}{\varrho}$$

Ejemplos:

$$\alpha = \frac{0,6}{45} \cdot \text{marca de minutos}' = 45,8'$$

$$b = \frac{48'' \cdot 67}{\text{marca de segundos}''} = 0,0156$$

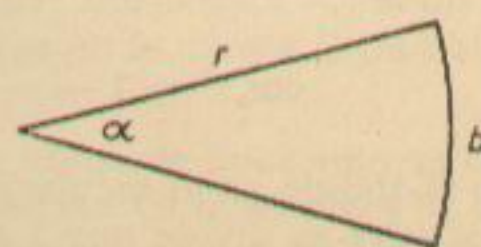


Fig. 24

12. Cálculo trigonométrico de triángulos planos

La fórmula del seno es un ejemplo típico de uso de la regla de cálculo en forma de cálculo de proporciones.

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

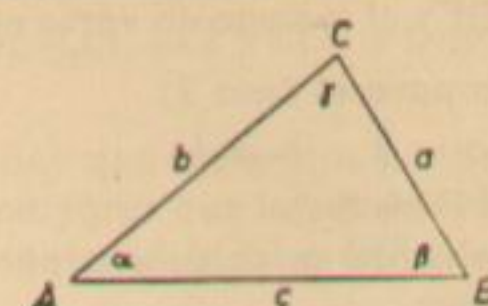


Fig. 25

Basta colocar una de estas relaciones, haciendo coincidir la longitud del lado en la escala D con el ángulo en la escala S, para que puedan leerse ya las otras relaciones, tanto si se da el ángulo como si se da la longitud del lado opuesto.

Lo más frecuente en la práctica es la resolución de triángulos rectángulos. En este caso particular es $\gamma = 90^\circ$, por tanto $\text{sen } \gamma = 1$ y $\beta = 90^\circ - \alpha$ ó $\alpha = 90^\circ - \beta$. Así se simplifica la fórmula del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{1} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

y de aquí $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

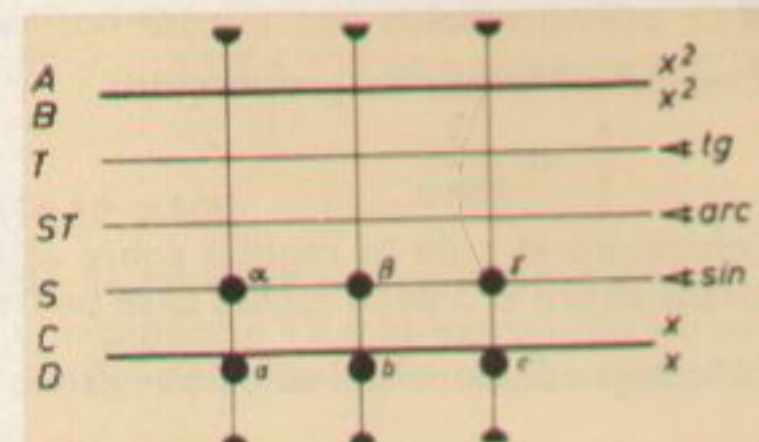


Fig. 26 Colocación del teorema de seno

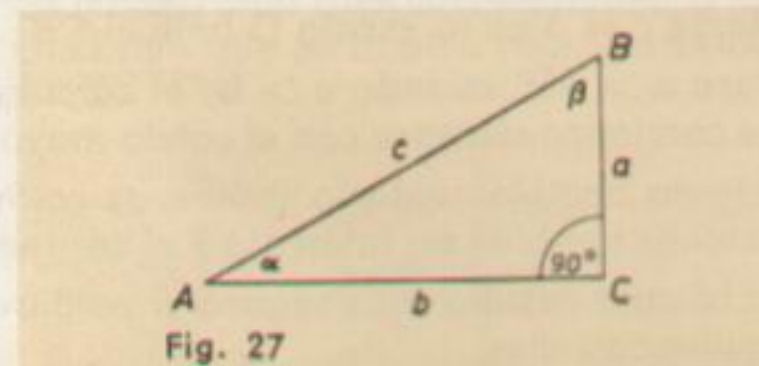


Fig. 27

Según sean los datos, tendremos dos maneras fundamentales de calcular:

- 1.— Se dan dos datos (excepto el caso 2)
- 2.— Los datos son los catetos a y b

Ejemplo para el caso 1:

Datos: $c = 5$, $b = 4$ Incógnitas: a , α , β

En primer lugar se coloca el 1 de la escala C ($\text{sen } 90^\circ = 1$) sobre la hipotenusa 5 de la escala D. A continuación se leen las incógnitas con solo correr el cursor.

$$\frac{5}{1} = \frac{4}{\text{sen } 53,15^\circ} = \frac{3}{\cos 53,15^\circ}$$

$$\beta = 53,15^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 53,15^\circ = 36,85^\circ$$

$$a = 3$$



Fig. 28 Se ha dado la hipotenusa

Sobre el cateto 4 de la escala D se encuentra $\beta = 53,15^\circ$ en la escala S (números negros). Para el siguiente paso es igual colocar $90^\circ - 53,15^\circ = 36,85^\circ$ en la numeración negra (sen) que $53,15^\circ$ en la numeración roja (cos), para encontrar debajo, en la escala D, el cateto 3.

Cuando los datos son un cateto y un ángulo se comienza el cálculo colocando el cateto y su correspondiente ángulo frente a frente, siendo el resto del cálculo análogo al de la fig. 28 y la hipotenusa se lee en la escala D bajo el 1 de la reglilla.

Algunas veces es mejor tomar la escala DF en vez de la D para ahorrarse el traslado de reglilla, pero entonces las otras partes aparecen también en la escala DF y el método no varía en nada.

Ejemplo para el caso 2:

Datos: $a = 3$, $b = 4$

Incógnitas: c , α , β .

Primeramente se calcula α a partir de los catetos:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

o mejor en forma de proporción:

$$\frac{4}{1} = \frac{3}{\tan \alpha}$$

Colocando el 1 de la reglilla sobre el 4 de la escala D y llevando el trazo del cursor sobre el 3 de la escala D se podrá leer el ángulo $\alpha = 36,9^\circ$ en la escala T.

En la segunda parte del cálculo se usa la fórmula del seno $\frac{c}{1} = \frac{3}{\sin 36,9^\circ}$.

Para ello, dejando el cursor tal como está sobre el valor 3, se corre la reglilla hasta colocar el ángulo $36,9^\circ$ de la escala S bajo el cursor, con lo cual puede leerse $c = 5$ en la escala D bajo el 1 de la reglilla.

Para $\alpha > 45^\circ$, cuando $a > b$, el cálculo debe conducirse de la siguiente forma. Se comienza siempre con el cateto mayor, solo que ahora se lee en la escala T el ángulo complementario (números rojos) y de forma correspondiente hay que colocar también en la escala S el coseno (números rojos).

El cálculo resulta más seguro si se dibuja el triángulo, pues con ello se evitan equivocaciones.

Los dos procesos de cálculo para triángulos rectángulos que se acaba de describir tienen particular importancia para problemas de coordenadas y vectores así como para el cálculo con números complejos. Ya que siempre se trata de problema de convertir coordenadas rectangulares a polares y viceversa.

Transformación de coordenadas:

$$\Delta x, \Delta y \leftrightarrow r/\varphi$$

Números complejos:

$$Z = a + jb = re^{j\varphi} = r/\varphi$$

Esta transformación se necesita frecuentemente en Electrotécnica. La forma $Z = a + jb$ se presta más fácilmente a la adición y substracción, mientras que la forma $Z = r/\varphi$ es más apropiada para multiplicar, dividir y elevar a potencias.

Ejemplos:

$$Z = 4,5 + j 1,3 = 4,68/16,13^\circ$$

$$Z = 6,7/49^\circ = 4,39 + j 5,05$$

La marcha del cálculo se desprende de las explicaciones anteriores y la fig. 31.

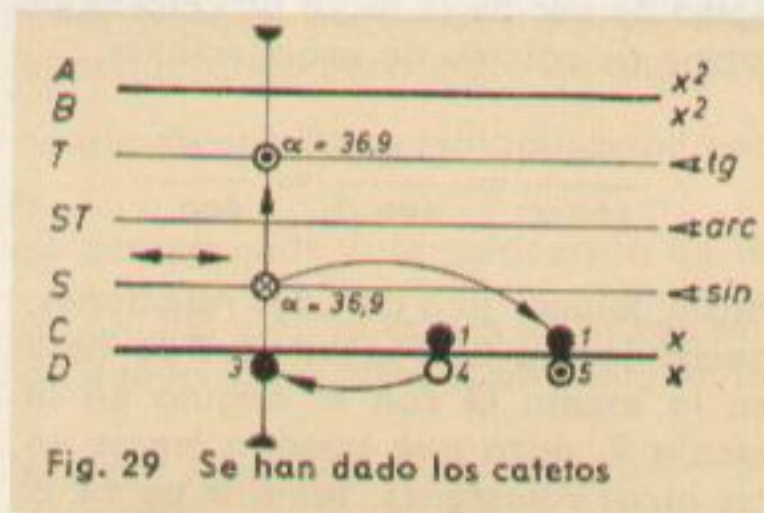


Fig. 29 Se han dado los catetos

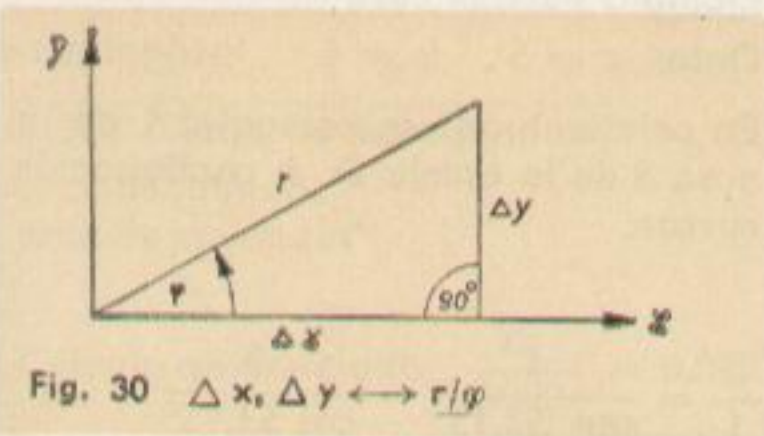


Fig. 30 $\Delta x, \Delta y \leftrightarrow r/\varphi$

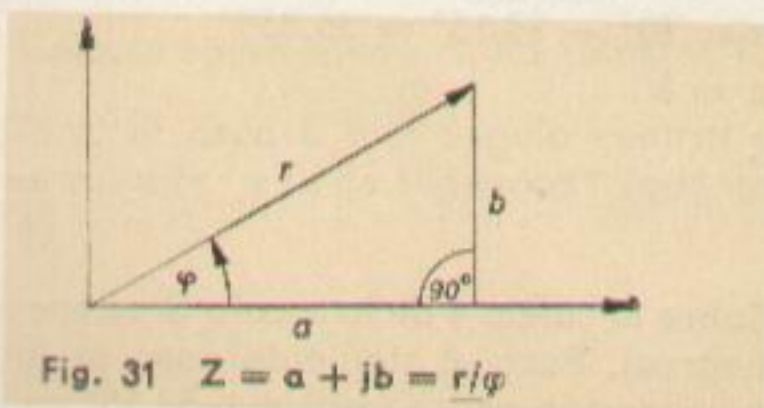


Fig. 31 $Z = a + jb = r/\varphi$

13. Las escalas exponenciales LL

Todas las escalas exponenciales están referidas a la escala básica D. En la ARISTO-MultiLog existen cuatro escalas e^x (LL0, LL1, LL2 y LL3) que alcanzan

desde 1,001 hasta 100000 y cuatro escalas e^{-x} (LL00, LL01, LL02 y LL03) que van desde 0,00001 hasta 0,999.

La ARISTO-HyperboLog tiene solo tres escalas e^x (LL1, LL2 y LL3) y tres escalas e^{-x} (LL01, LL02 y LL03).

Las escalas e^{+x} y e^{-x} son recíprocas entre sí y hay que saber que para calcular recíprocos de números menores que 2,5 (pero mayores que la unidad) se logra mayor precisión con las escalas exponenciales que con la CI o CIF.

$$\text{p. ej. } \frac{1}{1,0170} = 0,98328$$

Advertencia: Las escalas exponenciales son escalas con colocación fija de la coma, o sea que 1,35 significa tan solo 1,35 y no 13,5 ó 135 como ocurre con las escalas básicas.

13.1 Potencias y raíces de exponente 10 y 100

Las escalas exponenciales se han dispuesto de tal manera que el paso de una a otra contigua representa la elevación a una potencia 10 o la extracción de una raíz de este índice, según sea el sentido. La fig. 32 da una idea de las diferentes posibilidades.

Las escalas LL00 y LL0 que se encuentran en las fig. 32, 33 y 34 no sirven para el caso de la regla de cálculo ARISTO-HyperboLog, sino que corresponden a las escalas que en la ARISTO-MultiLog ocupan el sitio que en la otra regla anteriormente citada hay las escalas hiperbólicas.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1,015^{0,1} &= \sqrt[10]{1,015} = 1,00149 \quad (\text{LL0}) \\ 1,015^1 &= 1,015 \quad (\text{LL1}) \\ 1,015^{10} &= 1,1605 \quad (\text{LL2}) \\ 1,015^{100} &= 4,43 \quad (\text{LL3}) \\ \frac{1}{1,015^{100}} &= 0,115^{-100} = 0,2257 \quad (\text{LL03}) \\ \frac{1}{1,015^{10}} &= 1,015^{-10} = 0,8617 \quad (\text{LL02}) \\ \frac{1}{1,015^1} &= 1,015^{-1} = 0,98522 \quad (\text{LL01}) \\ \frac{1}{1,015^{0,1}} &= 1,015^{-0,1} = 0,99851 \quad (\text{LL00}) \end{aligned}$$

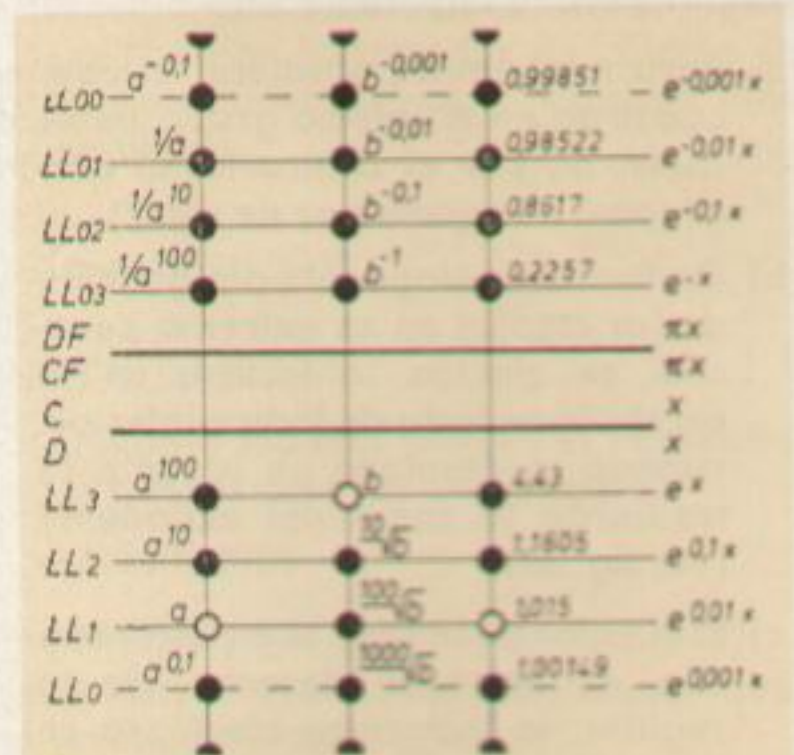


Fig. 32 Relación de las escalas LL

Diferentes posibilidades para un mismo alineamiento:

$$\begin{aligned} \frac{10}{\sqrt[10]{4,43}} &= 1,1605 \\ \frac{100}{\sqrt[100]{0,2257}} &= 0,98522 \\ \frac{1}{\sqrt[10]{4,43}} &= 0,8617 \\ 0,98522^{100} &= 0,2257 \end{aligned}$$

Estas operaciones se presentan rara vez en la práctica pero son útiles para facilitar la comprensión del funcionamiento de la escala exponencial.

13.2 Potencias $y = a^x$

Las escalas LL se usan para elevar un número a cualquier potencia de la misma manera como se multiplica con las escalas básicas.

Marcha del cálculo:

a) Con la ayuda del cursor, se coloca el extremo izquierdo (o derecho) de la escala C sobre el valor de la base "a" de la correspondiente escala exponencial LL.

- b) Se corre el cursor hasta encontrar el valor del exponente "x" en la escala C.
- c) Se lee la potencia bajo el cursor en la escala LL adecuada (véanse las reglas).
- Mediante la colocación del valor de la base se obtiene la posición para calcular una tabla de valores de la función $y = a^x$. La fig. 33 presenta la posición para $y = 3,2^x$, resolviendo el exponente 2,5 y sus variaciones decimales.

Ejemplos:		Lectura en la escala
$3,2^{2,5}$	$= 18,3$	LL3
$3,2^{0,25}$	$= 1,338$	LL2
$3,2^{0,025}$	$= 1,02956$	LL1
$3,2^{0,0025}$	$= 1,002912$	LL0
$3,2^{-2,5}$	$= 0,0546$	LL03
$3,2^{-0,25}$	$= 0,7476$	LL02
$3,2^{-0,025}$	$= 0,97134$	LL01
$3,2^{-0,0025}$	$= 0,997096$	LL00

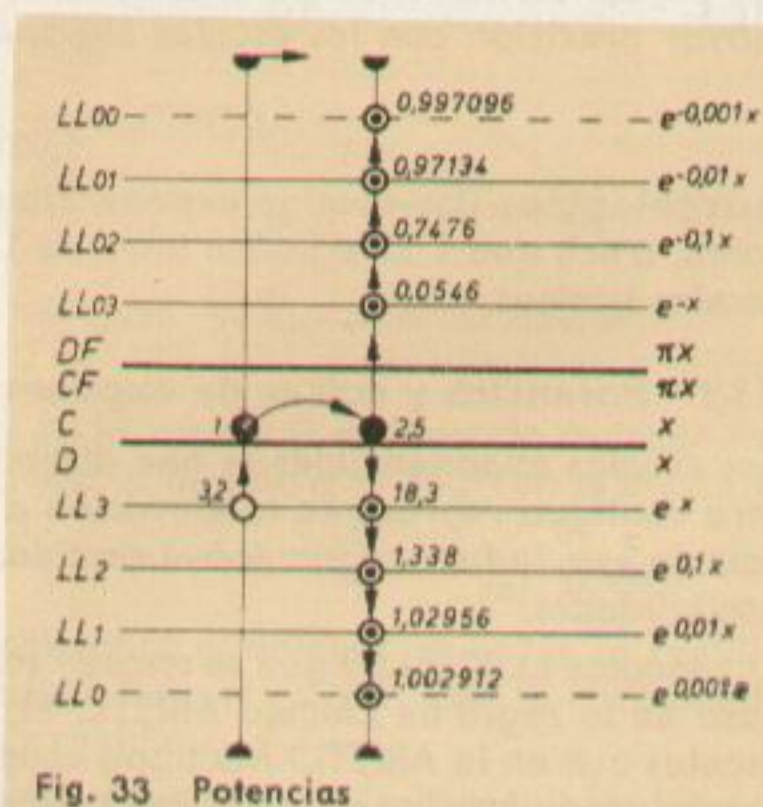


Fig. 33 Potencias

Reglas para la lectura:

- a) Para exponentes positivos, el comienzo y el final (base y resultado) se encuentran en el mismo grupo de escala LL o LL0, es decir en las del mismo color. Si, por el contrario, el exponente es negativo hay que pasar de un grupo a otro (cambiar de color).
- b) De forma análoga a la designación de las escalas en su extremo derecho, se efectúa la lectura en la escala inmediata de índice inferior, cuando se desplaza un lugar a la izquierda la coma del exponente (ver fig. 33).
- c) Si el valor de la base se ha colocado con el extremo derecho de la reglilla, la lectura se efectuará en la escala contigua de índice superior (fig. 35).

Para $0 < a < 1$ las potencias de exponentes positivos se hallan en el grupo de escalas LL00—LL03 y las de exponente negativo en el grupo de escalas LL0—LL3.

$$\begin{aligned} 0,685^{2,7} &= 0,36 \\ 0,685^{-2,7} &= 2,78 \\ 1,46^{2,7} &= 2,78 \\ 1,46^{-2,7} &= 0,36 \end{aligned}$$

La fig. 35 muestra los mismos ejemplos que la fig. 34, pero colocando el extremo derecho de la reglilla, con lo cual el resultado no se halla en la misma escala que la base, sino en la inmediata LL3 o LL03 respectivamente.

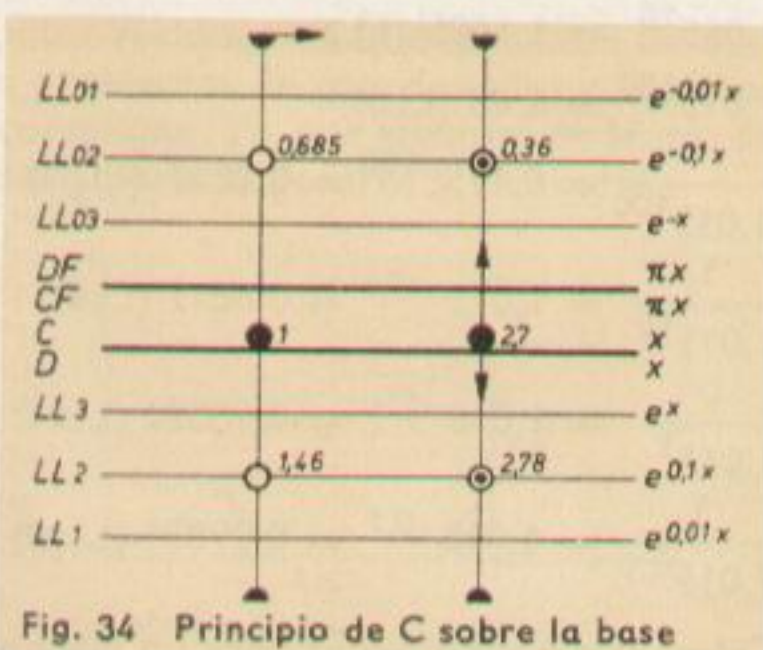


Fig. 34 Principio de C sobre la base

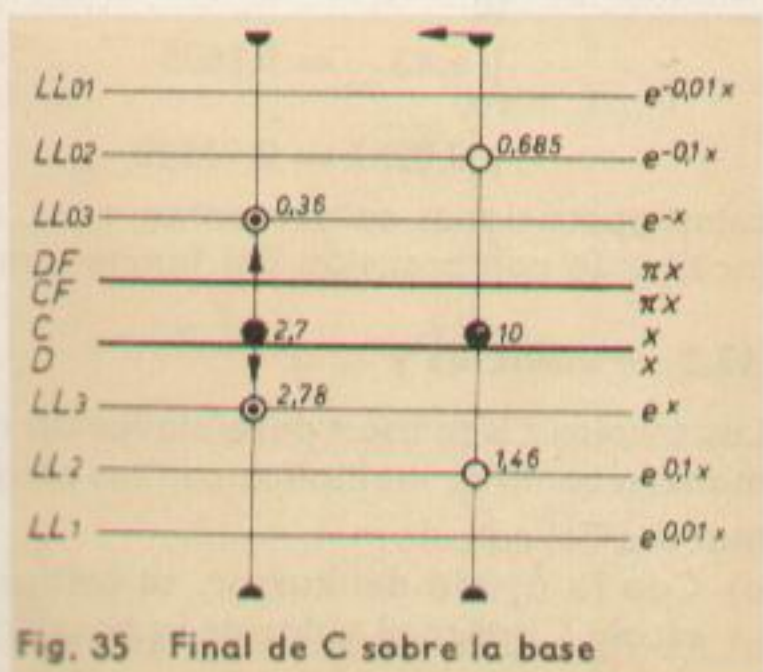


Fig. 35 Final de C sobre la base

13.3 Casos especiales de $y = a^x$

Las posibilidades de variación de exponente y base vienen limitadas por el alcance de las escalas exponenciales.

13.3.1 $y > 100000$ e $y < 0,00001$

Si el resultado de una potencia sobrepasa el alcance de las escalas exponenciales, debe descomponerse el exponente en sumandos y con ello la potencia en factores.

Ejemplo:

$$3,14^{19} = 3,14^{6+6+7} = (3,14^6)^2 \cdot 3,14^7 = 0,955^2 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^3 = 2,76 \cdot 10^9$$

En el caso de exponentes negativos el proceso es exactamente el mismo.

13.3.2 $0,999 < y < 1,001$ (solamente para la ARISTO-MultiLog)

Cuando el valor de una potencia resulta comprendido entre 0,999 y 1,001, por tratarse de un exponente pequeño, el resultado no puede hallarse en las escalas LL. En tal caso se parte del siguiente desarrollo en serie:

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

que nos lleva a la siguiente fórmula aproximada:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a; \quad \text{para } |x| \ll 1$$

Mediante la ayuda del cursor se coloca el 1 de la escala C sobre la base "a" en la escala LL, que en la escala D es "ln a" (ver párrafo 13.6) y ahora una multiplicación por "x" desplazando el cursor a este valor de la escala C, da sobre la escala D el valor de $x \cdot \ln a$. Si este valor intermedio de cálculo se suma o resta de la unidad, se obtendrá la potencia buscada a. Cuando más pequeño sea el exponente más exacto es el resultado.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplos: } 3,2^{0,00025} &\approx 1 + 0,00025 \cdot \ln 3,2 \\ &= 1 + 0,0002908 = 1,0002908 \\ 3,2^{-0,00025} &\approx 1 - 0,00025 \cdot \ln 3,2 \\ &= 1 - 0,0002908 = 0,9997092 \end{aligned}$$

Si se desplaza la coma del exponente, haciéndose todavía menor, el resultado no difiere más que en el número de ceros o nueves después de la coma.

$$3,2^{0,000025} = 1,00002908$$

13.3.3 $0,999 < a < 1,001$ (solamente para la ARISTO-MultiLog)

Cuando en una potencia $y = a^x$, la base es mayor que 0,999, pero menor que 1,001, resulta también necesario usar una fórmula aproximada.

Según el anterior desarrollo en serie aquí también puede usarse $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$. Como además "a" es muy próximo a la unidad, conviene ponerlo en la forma $a = 1 \pm n$, con lo cual resulta:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln(1 \pm n)$$

$$\ln(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1 \pm n) = \pm n; \quad \text{para } |n| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^x \approx 1 + n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

Resulta, pues, indiferente, en el margen antedicho, colocar "ln(1 + n)" en la escala LL o bien "n" en la escala D, dado que $\ln(1 \pm n) \approx \pm n$ es tanto más exacto, cuanto más pequeño es n. Cuando el alcance de la escala LL no es suficiente, puede continuarse el cálculo con la escala D como continuación de la LL, colocando en lugar del valor $1 \pm n$, el valor $\pm n$.

Colocando el 1 de la escala C, frente al n de la escala D, se tiene lo mismo que si se tratara de leer $\ln(1 \pm n)$ sobre una exponencial prolongada de alcance

1,0001 a 1,001 y 0,999 a 0,9999 etc. A continuación el cálculo se hace de la forma habitual para la elevación a potencias. Todos los resultados leídos en la escala D, son fundamentalmente resultado de una multiplicación que ha de complementarse por la adición de 1 o que ha de sustrarse de 1.

Así que el exponente va aumentando, llega un momento en que el resultado ya puede leerse en las escalas exponenciales correspondientes.

Ejemplos:

$$1,00023^{3,7} = (1 + 0,00023)^{3,7} = 1,000851$$

$$1,00023^{37} = 1,00855$$

$$0,99977^{3,7} = (1 - 0,00023)^{3,7} = 0,999149$$

$$0,99977^{37} = 0,99154$$

Lectura en escala

D y añadir 1

LL0

D y restar de 1

LL00

Si se coloca el cursor sobre el extremo inicial de la escala D, entonces la raya inicial 1,001 de la escala LL0 se halla exactamente debajo, de forma que queda claro el paso desde LL0 a D.

13.3.4 $0,99 < y < 1,01$ (solamente para la ARISTO-HyperboLog)

Cuando el valor de una potencia resulta comprendido entre 0,99 y 1,01, por tratarse de un exponente pequeño, el resultado no puede hallarse en las escalas LL. En tal caso se parte del siguiente desarrollo en serie:

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

que nos lleva a la siguiente fórmula aproximada:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a; \quad \text{para } |x| \ll 1$$

Mediante la ayuda del cursor se coloca el 1 de la escala C sobre la base "a" en la escala LL, que en la escala D es "ln a" (ver párrafos 14.4 y 14.6) y ahora una multiplicación por "x" desplazando el cursor a este valor de la escala C, da sobre la escala D el valor de $x \cdot \ln a$. Si este valor intermedio de cálculo se suma o resta de la unidad, se obtendrá la potencia buscada a. Cuando más pequeño sea el exponente más exacto es el resultado.

Ejemplos:

$$3,2^{0,0025} \approx 1 + 0,0025 \cdot \ln 3,2 = 1 + 0,002908 = 1,002908$$

$$3,2^{-0,0025} \approx 1 - 0,0025 \cdot \ln 3,2 = 1 - 0,002908 = 0,997092$$

Si se desliza la coma del exponente, haciéndose todavía menor, el resultado no difiere más que en el número de ceros o nueves después de la coma.

$$3,2^{0,00025} = 1,0002908 \quad 3,2^{-0,00025} = 0,9997092$$

13.3.5 $0,99 < a < 1,01$ (solamente para la ARISTO-HyperboLog)

Cuando en una potencia $y = a^x$, la base es mayor que 0,99, pero menor que 1,01 resulta también necesario usar una fórmula aproximada.

Según el anterior desarrollo en serie aquí también puede usarse $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$. Como además "a" es muy próximo a la unidad, conviene ponerlo en la forma $a = 1 \pm n$, con lo cual resulta:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln(1 \pm n)$$

$$\ln(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1 \pm n) \approx \pm n; \quad \text{para } |n| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

Resulta, pues, indiferente, en el margen antedicho, colocar "ln(1 + n)" en la escala LL o bien "n" en la escala D, dado que $\ln(1 \pm n) \approx \pm n$ es tanto más exacto, cuanto más pequeño es n. Cuando el alcance de la escala LL no es sufi-

ciente, puede continuarse el cálculo con la escala D como continuación de la LL, colocando en lugar del valor $1 \pm n$, el valor $\pm n$.

Colocando el 1 de la escala C, frente al n de la escala D, se tiene lo mismo que si se tratara de leer $\ln(1 \pm n)$ sobre una exponencial prolongada de alcance 1,001 a 1,01 y 0,99 a 0,999 etc. A continuación el cálculo se hace de la forma habitual para la elevación a potencias. Todos los resultados leídos en la escala D, son fundamentalmente resultado de una multiplicación que ha de complementarse por la adición de 1.

Así que el exponente va aumentando, llega un momento en que el resultado ya puede leerse en las escalas exponenciales correspondientes.

Ejemplos:

$$1,0023^{3,7} = (1 + 0,0023)^{3,7} = 1,00851$$

$$1,0023^{37} = 1,0888$$

$$0,9977^{3,7} = (1 - 0,0023)^{3,7} = 0,99149$$

$$0,9977^{37} = 0,9184$$

Lectura en escala

D y añadir 1

LL1

D y restar de 1

LL01

Si se coloca el cursor sobre el extremo inicial de la escala D, entonces se obtiene una idea del error máximo que puede cometerse en estos cálculos aproximados observando la discrepancia existente con el valor 1,01 de la escala LL1, para la ARISTO-HyperboLog y la mucho más pequeña con el 1,001 de la escala LL0 de la ARISTO-MultiLog. De aquí resulta que el salto de la escala LL a la D se realiza con la precisión de la regla de cálculo para el caso de la ARISTO-MultiLog. Como que en la ARISTO-HyperboLog faltan las escalas LL0, no es tan exacto el paso sino que se cometen unos pequeños errores.

Cuando se usa la escala básica D en vez de la escala exponencial exacta en el margen 1,001 a 1,01, puede mejorarse la precisión del cálculo incluyendo en la fórmula aproximada el término cuadrático:

A) $\ln(1 \pm n) = \pm n (1 \mp n/2)$ al poner la base en la escala D

B) $e^{\pm x} = 1 \pm x (1 \pm x/2)$ al leer la potencia en la escala D

Si el resultado fuese leído en una escala exponencial, bastará corregir el comienzo sobre la escala D con la fórmula A). Cuando todo el cálculo se hace con la escala D, hay que efectuar ambas correcciones, A) y B).

Ejemplo: $1,0023^{3,7} = 1,00854$

$$0,0023 (1 - \frac{1}{2} \cdot 0,0023) = 0,0023 \cdot 0,99885 = 0,002297 \text{ que se colocará en la escala D en vez de } n = 0,0023 \text{ con el 1 de la regilla.}$$

La elevación a potencia $1 + 0,002297 \cdot 3,7$ da ahora 1,00850. Como la lectura se ha efectuado en la escala D es necesario corregir con la fórmula B):

$$0,00850 (1 + \frac{1}{2} \cdot 0,00850) = 0,00850 \cdot 1,00425 = 0,00854.$$

Después de añadir la unidad el resultado es 1,00854 (el valor exacto es 1,0085362). Este cálculo parece complicado a primera vista, pero, tras haberlo practicado, es muy sencillo y las correcciones pueden efectuarse a "simple vista". Esta corrección no son necesarias cuando la base es $< 1,001$, porque en tales casos la corrección es inferior a la precisión de la regla de cálculo.

13.4 Potencias $y = e^x$

$y = e^x$ resulta un caso particular al colocar la regilla en su posición básica ya que con ello se coloca como base el número $e = 2,718$. Como sea que la escala D tiene ya esta posición respecto las exponenciales, basta llevar el cursor sobre el exponente en la escala D, para poder leer en las escalas LL la potencia de base e.

$$e^{1,489} = 4,43 \quad (\text{LL3})$$

$$e^{0,1489} = 1,1605 \quad (\text{LL2})$$

$$e^{0,01489} = 1,015 \quad (\text{LL1})$$

$$e^{0,001489} = 1,001489 \quad (\text{LL0})$$

$$e^{-1,489} = 0,2260 \quad (\text{LL03})$$

$$e^{-0,1489} = 0,8618 \quad (\text{LL02})$$

$$e^{-0,01489} = 0,98523 \quad (\text{LL01})$$

$$e^{-0,001489} = 0,998513 \quad (\text{LL00})$$

Para ulteriores variantes sirve la fórmula aproximada $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$
 $e^{0,0001489} = 1,0001489$

13.5 Raíces $y = \sqrt[x]{a}$

Con las escalas exponenciales pueden extraerse raíces de cualquier índice. Para comprender este cálculo es preferible expresarlo en forma de potencia:

Proceso de cálculo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3,5]{e} &= e^{\frac{1}{3,5}} = 1,3307 \\ \frac{1}{\sqrt[3,5]{e}} &= e^{-\frac{1}{3,5}} = 0,7514 \\ \frac{1}{\sqrt[0,35]{e}} &= e^{-\frac{1}{0,35}} = 0,0574 \end{aligned}$$

De aquí que sea más fácil trabajar con la escala recíproca CI, estando la reglilla en su posición básica (fig. 36). La extracción de raíces de radicando cualquiera es una operación análoga

a la división, ya que $\sqrt[x]{y} = a$ es la operación recíproca de $y = a^x$.

Proceso de cálculo:

- Colocar frente a frente el radicando "y" de la escala LL y el índice de la raíz "x" de la escala C de la reglilla.
- El valor de la raíz se lee debajo del extremo inicial o final de la reglilla en la correspondiente escala LL.

Aquí se aplican también las normas de lectura dadas en la pag. 20. Conviene repetir que cuando las lecturas se efectúan con el extremo derecho de la reglilla, la lectura debe hacerse en la escala de numeración inmediatamente inferior LL0—LL3 o LL00—LL03.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \sqrt[0,77]{21} &= 52,1 & \frac{1}{\sqrt[0,77]{21}} &= 0,0192 \\ \sqrt[7,7]{21} &= 1,485 & \frac{1}{\sqrt[7,7]{21}} &= 0,6734 \\ \sqrt[77]{21} &= 1,0403 & \frac{1}{\sqrt[77]{21}} &= 0,96122 \\ \sqrt[770]{21} &= 1,00396 & \frac{1}{\sqrt[770]{21}} &= 0,99605 \end{aligned}$$

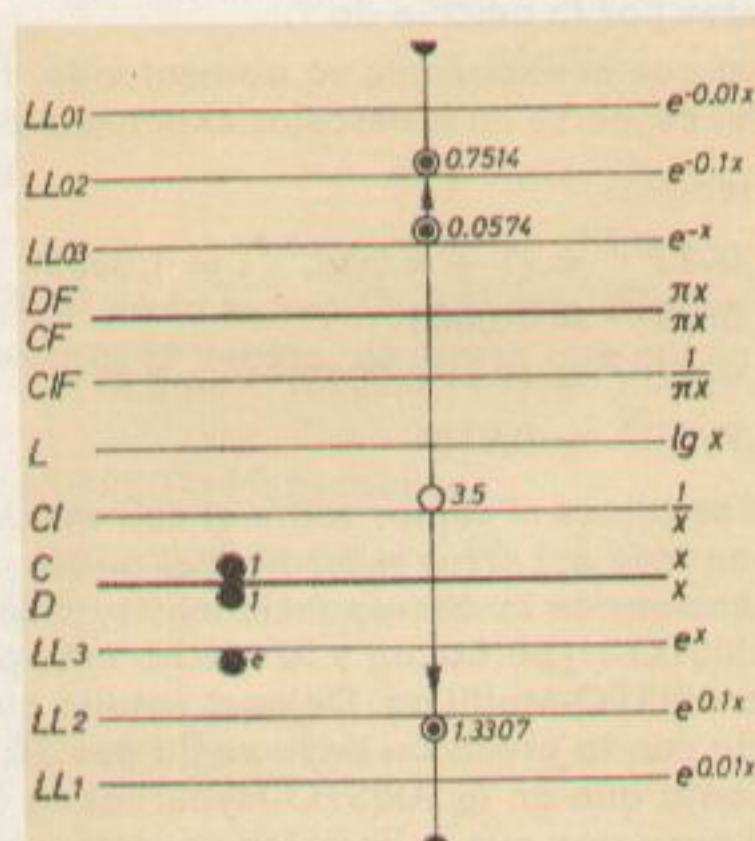


Fig. 36 Cálculo con la escala CI

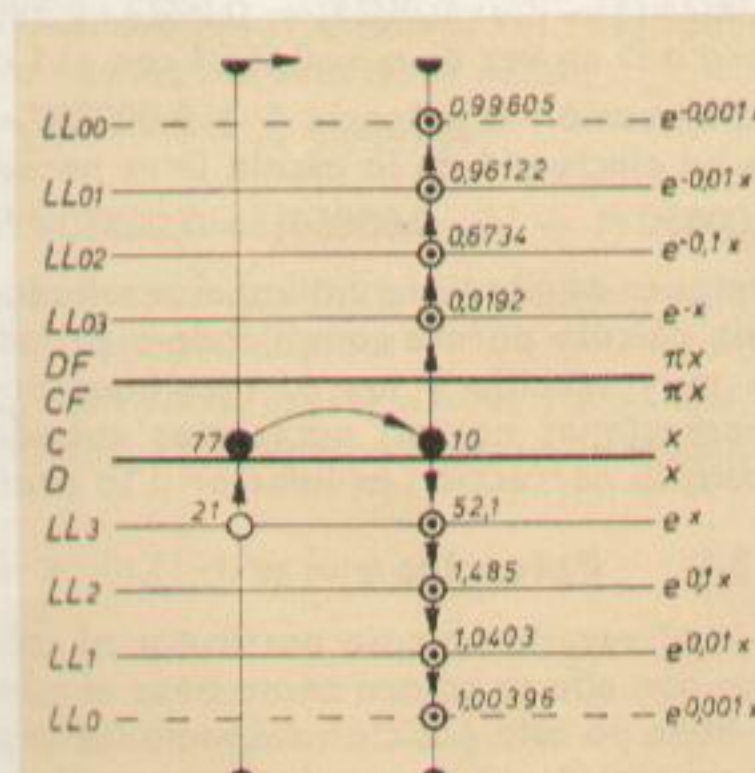


Fig. 37 Raíces

13.6 Logaritmos

Por medio de las escalas exponenciales puede hallarse cualquier tipo de logaritmo. Los logaritmos proceden de invertir la operación de elevación a una potencia.

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ x &= \log_a y \text{ (léase: logaritmo, en base a, de y)} \end{aligned}$$

Para hallar un logaritmo se procede como en el cálculo de una potencia en el cual la incógnita fuera el exponente. El camino para resolver este cálculo se verá mejor examinando la colocación para el cálculo de potencias y realizando su inversión.

Proceso de cálculo:

- Colocar el cursor sobre el valor de la base a en la escala LL.
- Colocar el uno de la reglilla bajo el trazo del cursor.
- Desplazar el cursor hasta el número y de la escala exponencial.
- Leer el logaritmo x bajo el trazo del cursor en la escala básica C.

Ejemplo:

$$\log_5 125 = 3,0 \text{ (fig. 40).}$$

Cuando se colocan frente a frente la base 5 de la escala LL y el 1 del comienzo de la reglilla, se encuentra el logaritmo 3,0 en la escala C sobre el número 125 de la escala LL3.

Los logaritmos decimales se obtienen colocando el número 10 como base (fig. 41). Como ejemplo

$$\log 1,92 = 0,2833$$

el logaritmo 0,2833 se lee en la escala C sobre el número 1,92 de la escala LL2. Además existe en la reglilla la escala ordinaria de mantisas L (ver pag. 26).

Los logaritmos naturales o neperianos se halla pasando de las escalas LL a la escala D, ya que la base e está siempre colocada.

$$\ln 1,06 = 0,0583$$

$$\ln 1,27 = 0,239$$

$$\ln 4,5 = 1,504$$

Para determinar la colocación de la coma basta considerar que $\log_a a = 1$. Si se coloca el 1 del principio de la reglilla sobre la base a, entonces los logaritmos de los números situados a la derecha de este valor serán > 1 , y los de la izquierda, cuando se ha colocado el final de la reglilla sobre la base, serán < 1 .

Reglas para la lectura:

- Cada paso a escala vecina LL — en el orden sucesivo LL3, LL2, LL1 o bien en el LL03, LL02, LL01 — trae como consecuencia el corrimiento de la coma del logaritmo un lugar a la izquierda y si el paso es en sentido inverso al dicho, el corrimiento es a la derecha.



Fig. 38 Potencias $y = a^x$

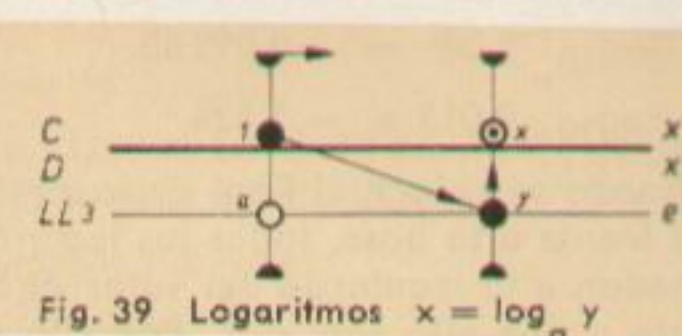


Fig. 39 Logaritmos $x = \log_a y$

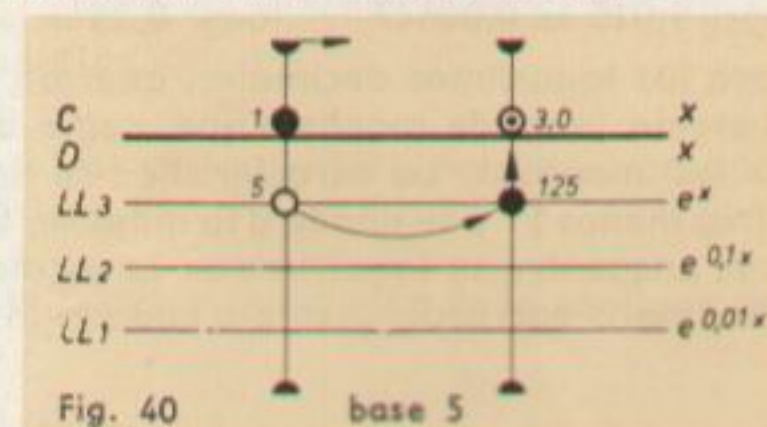


Fig. 40 base 5



Fig. 41 base 10

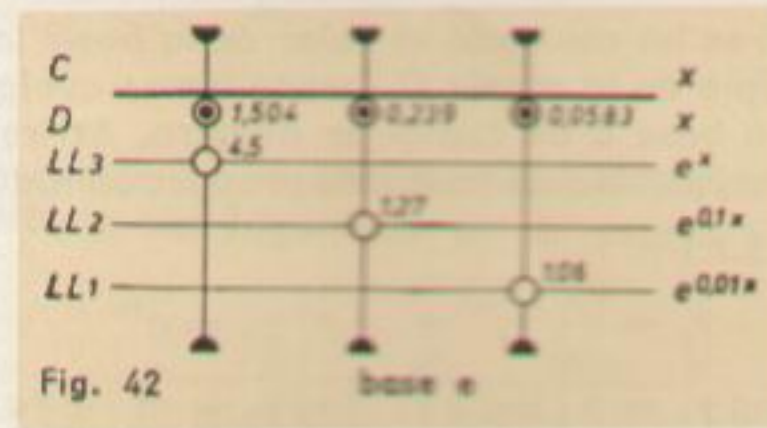


Fig. 42 base e

b) Cuando se coloca el número y la base sobre las escalas LL del mismo color (o bien de color diferente) se obtienen logaritmos positivos (o bien negativos)

- a) $\log_{10} 50 = 1,699$
b) $\log_{10} 2 = 0,3010$
b) $\log_{10} 0,5 = -0,3010$
c) $\log_{10} 1,03 = 0,01283$
d) $\log_{10} 0,015 = -1,824$

Cuando se coloca el final de la reglilla frente a la base, todas las lecturas quedan a la izquierda del valor de la base y por ello son < 1 . Por ello la coma del logaritmo debe correrse un lugar hacia la izquierda.

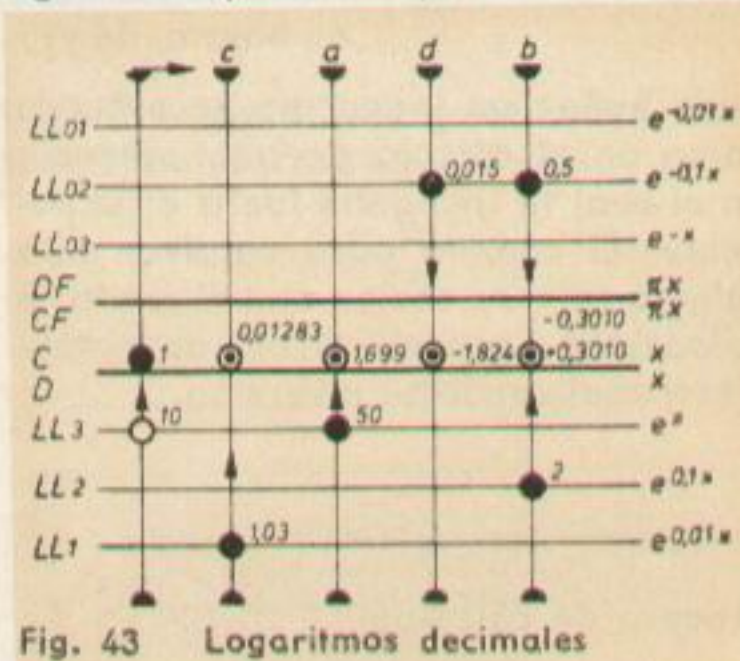


Fig. 43 Logaritmos decimales

Ejemplos para ejercitarse:

- $\log_{10} 6 = 0,778$ $\log_2 16 = 4,0$ $\ln 4,375 = 1,475$
 $\log_{10} 1,14 = 0,0569$ $\log_2 1,02 = 0,02857$ $\ln 0,622 = -0,475$
 $\log_{10} 1,015 = 0,00647$ $\log_2 0,25 = -2$ $\ln 0,05 = -3,0$

Para los logaritmos decimales, que son los más usados, se halla en la reglilla la escala usual de mantisas que, como ocurre en las tablas de logaritmos, solo da las mantisas. La característica se halla mediante la regla de "número de cifras menos 1" y se añade a la mantisa. Para cada número colocado en la escala C se encuentra su logaritmo en la escala L y de manera inversa puede leerse el número correspondiente a cada logaritmo

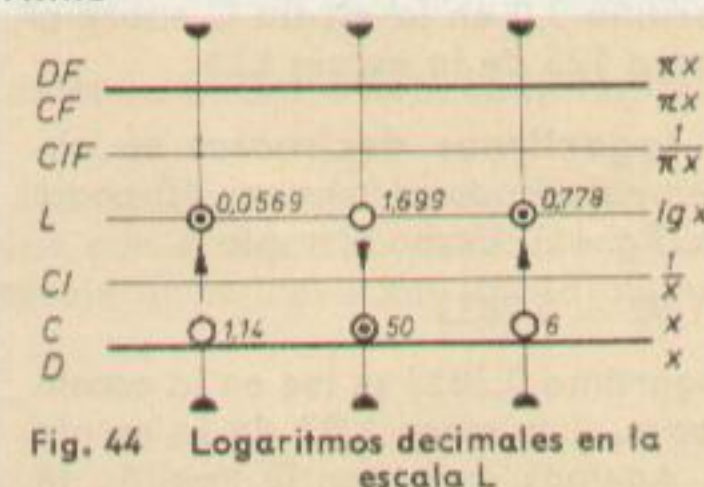


Fig. 44 Logaritmos decimales en la escala L

- $\log 1,14 = 0,0569$
 $\log 6 = 0,778$
antilog 1,699 = 50

13.7 Cálculo de proporciones con las escalas exponenciales

Si se ha colocado el valor de la base "a" leído en la escala LL, frente al principio de la escala C, puede leerse cualquier potencia de esta base o logaritmo en base a de cualquier número. Así resulta que la base "a" de la escala LL actúa como un factor de proporcionalidad.

13.7.1

$$y_1 = a^n \quad y_2 = a^m$$

$$\log y_1 = n \cdot \log a \quad \log y_2 = m \cdot \log a$$

$$\frac{\log a}{1} = \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m}$$

$$\text{ó } \frac{\ln a}{1} = \frac{\ln y_1}{n} = \frac{\ln y_2}{m}$$

Conocidos tres valores de la proporción, puede calcularse el cuarto valor y otros si la proporción es múltiple. Tenemos de nuevo una disposición de cálculo en forma de proporción y ella ha de buscarse preparando los cálculos de esta forma.

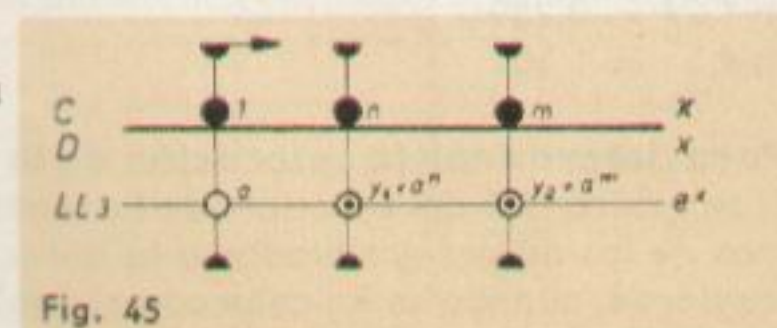


Fig. 45

13.7.2

$$y = \frac{m}{a^n}$$

$$\log y = \frac{m}{n} \log a \rightarrow \frac{\log y}{m} = \frac{\log a}{n}$$

$$y = 4,3^{\frac{6,8}{2,7}} \rightarrow \frac{\log y}{6,8} = \frac{\log 4,3}{2,7}$$

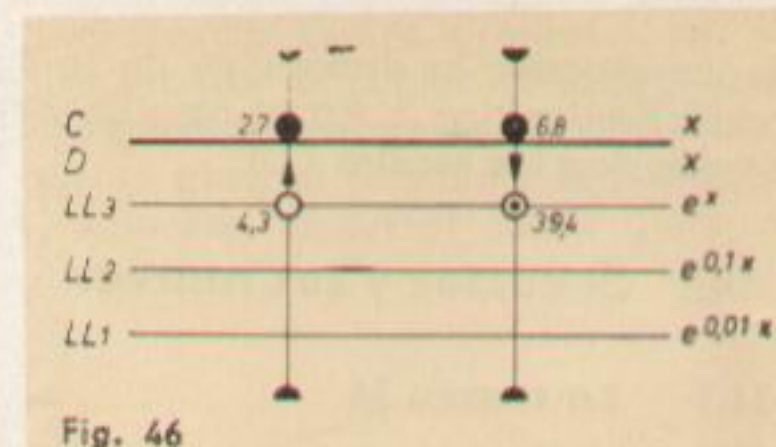


Fig. 46

Si se ponen frente a frente el 4,3 de la escala LL3 y el 2,7 de la escala C; debajo del 6,8 de la escala C se leerá el resultado 39,4 en la escala LL3.

Del mismo modo se pueden solucionar problemas similares:

$$y = \sqrt[2,7]{4,3^{6,8}} \text{ ó } y^{2,7} = 4,3^{6,8}$$

13.7.3

Muchas leyes de la naturaleza pueden escribirse en forma de proporción del tipo antedicho, de forma que la variación de una variable es proporcional al logaritmo de la relación de la otra.

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const} (x_2 - x_1)$$

Una variación de x_1 a x_2 en el intervalo i , trae como consecuencia una variación de y_1 hasta y_2 .

Llamando r a la relación $\frac{y_2}{y_1}$, es decir la fracción que queda de la cantidad inicial, la ecuación se convierte en

$$\frac{\log r}{i} = \text{const} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \dots$$

Ejemplo: Desintegración radioactiva. Un elemento se desintegra un 40% en 30 días, quedando el 60%. ¿Al cabo de cuánto tiempo existirá solamente el 20%?

$$i_1 = 30, \quad r_1 = 0,6, \quad r_2 = 0,2$$

$$\frac{\log 0,6}{30} = \frac{\log 0,2}{x} \quad x = 94,5 \text{ días}$$

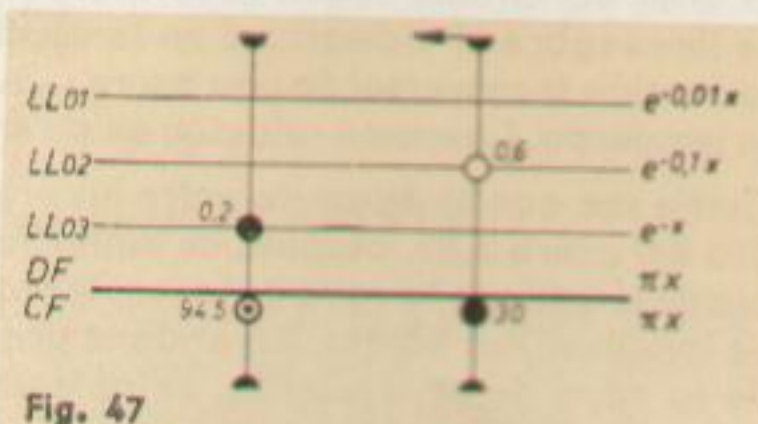


Fig. 47

13.7.4

Para multiplicar un logaritmo por una constante, se colocan bajo, el cursor, uno enfrente del otro, el valor de la base del logaritmo en la escala LL y el valor de la constante en la escala C, para obtener nuevamente una disposición de cálculo de tablas que permite multiplicar dicha constante por logaritmos del sistema cuya base se ha colocado.

$$x = c \cdot \log_a y \rightarrow \frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

$$2 \cdot \log_{10} 100 = 4; \quad 2 \cdot \log_{10} 1,8 = 0,511$$

En electrónica es frecuente la conversión de una relación de tensiones en decibelios, según la fórmula $db = 20 \cdot \log \frac{V_1}{V_2}$.

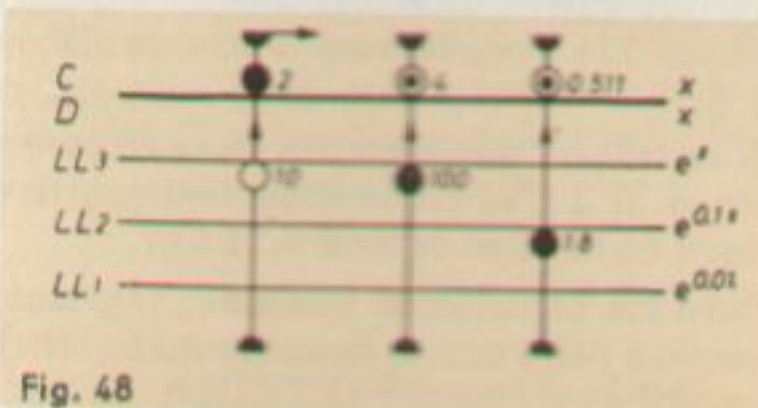


Fig. 48

Según muestra la disposición de la fig. 48 los logaritmos decimales resultan multiplicados por 2. En el caso de que la relación de voltajes fuese < 1 , se emplearían las escalas LL0.

14. El cursor y sus marcas

14.1 La marca 36

En la parte superior derecha del anverso del cursor (fig. 49) existe una raya corta que lee el valor 36 en las escalas CF/DF, cuando la raya central larga se halla en el 1 de las escalas C/D. De esta forma resulta una multiplicación por 36, cuando estando el cursor en cualquier posición, se pasa de C/D a CF/DF, resultando una cómoda operación para las conversiones siguientes:

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

$$1^\circ = 3600''$$

$$1 \text{ año} = 360 \text{ días}$$

(para cálculos de intereses)

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

$$\kappa_{AL} = 36 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \text{ (conductancia).}$$

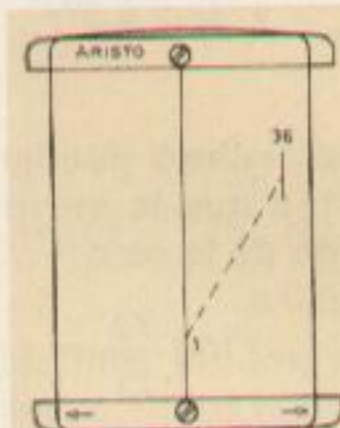


Fig. 49

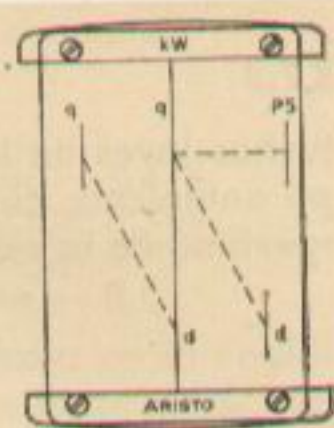


Fig. 50

14.2 Area del círculo y peso de barras de acero

En el reverso del cursor (fig. 50) la distancia entre la raya central y cada una de las dos rayas cortas de la parte superior izquierda e inferior derecha es igual al factor $\pi/4 = 0,785$ (respecto la escala de cuadrados) y sirve para calcular el área del círculo según la fórmula $a = d^2 \cdot \pi/4$. Si la raya central del cursor se lleva sobre el diámetro d en la escala D, puede leerse el área del círculo (o la sección transversal de una barra redonda) arriba en la escala A con la raya de la izquierda. La misma relación existe entre la raya inferior derecha y la central.

Como sea que la distancia entre las rayas corresponde también al peso específico del acero 7,85, después de hallar la sección transversal con la raya central, puede leerse con la raya de la izquierda el peso de la barra de acero por unidad de longitud. Por último, llevando el principio de la escala B de la reglilla debajo de la raya de la izquierda, se obtendrá moviendo el cursor, el peso de una barra de cualquier longitud.

14.3 Las marcas kW y PS (CV)

La raya superior derecha del reverso del cursor (fig. 50) lleva la denominación PS que quiere decir caballo de vapor (CV) y su distancia a la raya central da el factor 736 para la conversión de CV en kW y viceversa, utilizando las escala A y B.

Si se coloca, por ejemplo, la raya central sobre 20 kW, la raya superior derecha leerá 27,2 CV. En sentido inverso, la colocación de 7 CV con la raya PS nos dará en la raya central 5,15 kW.

Para los cálculos en unidades inglesas se sirven cursores con el factor de conversión 746 y con la denominación HP (horse-power) (nº de pedido p. ej. L0970 E).

14.4 Para quitar el cursor

Los trazos del cursor han sido ajustados a las escalas de tal forma que se pueda pasar de un lado a otro de la regla en el transcurso de cualquier cálculo. Este ajuste no se pierde al desmontar el cursor para limpiarlo. Los cristales del

cursor van fijos a los brazos de este, por un lado, con cuatro tornillos y, por el otro, con dos que parecen pulsadores. Para separar el cursor de la regla, se aprietan hacia abajo con las uñas de los pulgares los extremos marcados con flechas de los brazos del cursor, hasta que se abra el pulsador. El pulsador superior se abre al levantar el cristal y, entonces, el cursor puede quitarse fácilmente.

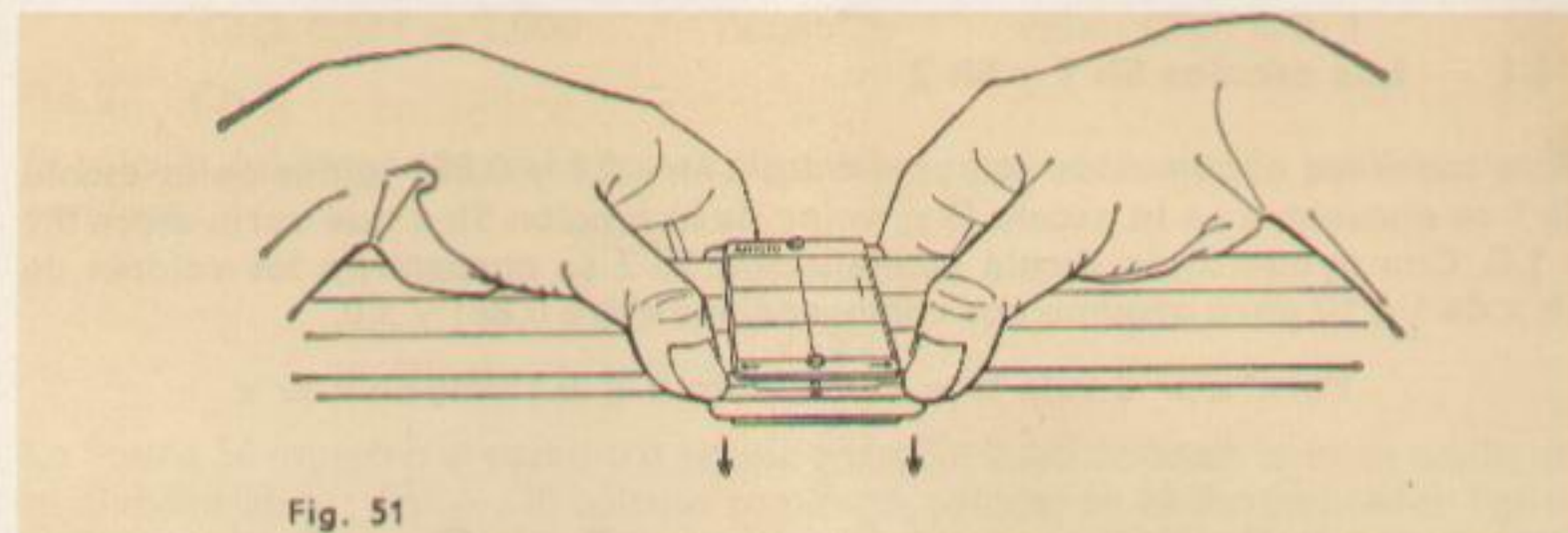


Fig. 51

14.5 Ajuste del cursor

En el caso de que el cursor precise ajuste, p. ej. en el caso de colocar uno de repuesto, se coloca la regla de cálculo sobre una mesa, de tal modo, que el lado del cursor con cuatro tornillos quede hacia arriba. Después de aflojar estos cuatro tornillos con un destornillador adecuado, se da la vuelta a la regla de cálculo y se coloca, lo más exactamente posible, la raya del cursor sobre el final de las escalas básicas. Entonces se da nuevamente la vuelta a la regla de cálculo, con sumo cuidado para no mover el cursor, y sujetándolo bien, se alinea el vidrio superior del cursor con los valores finales 1 de las escalas. Por último se atornillan bien los cuatro tornillos.

15. Tratamiento de la regla de cálculo ARISTO

La regla de cálculo es un instrumento auxiliar muy valioso y por eso debe ser tratado con sumo cuidado. Es necesario proteger las escalas y el cursor de arañazos y suciedad, que podrían afectar la precisión de las lecturas.

Se recomienda lavar de cuando en cuando la regla de cálculo con el producto especial DEPAROL, puliendo después en seco. No se debe emplear nunca productos químicos (disolventes) ya que podría borrarse la graduación.

Debe protegerse la regla de cálculo de gomas de borrar para plásticos y sus productos para borrar, ya que estos dañan la superficie del ARISTOPAL. Además debe evitarse la colocación en lugares calientes, p. ej. sobre radiadores o a pleno sol, ya que a temperaturas altas de unos 60°C se producen deformaciones. Para reglas de cálculo con tales daños no se garantiza sustitución.

16. Las funciones hiperbólicas de la ARISTO-HyperboLog

Las escalas Sh 1, Sh 2 y Th se relacionan con la escala básica D, como todas las escalas trigonométricas. Para cualquier lectura de 0,1 a 3,0 se puede leer el valor de la correspondiente función en la escala D.

Para las funciones hiperbólicas los argumentos no vienen dados en grados, sino en radianes. Para pasar de grados a radianes y viceversa se sigue el método indicado en los párrafos 11.3.2 y 11.4 o sea por lectura directa sobre las escalas C y ST con la raya del cursor.

Con las escalas Sh 1, Sh 2 y Th se pueden realizar multiplicaciones y divisiones lo mismo que con las escalas trigonométricas, de manera que pueden calcularse expresiones del tipo $\text{Sh } x \cdot \cos y$.

16.1 Las escalas Sh 1 y Sh 2

Para todos los argumentos comprendidos entre 0,1 y 0,881 leídos en la escala Sh 1 se encuentra en la escala D el valor de la función $\text{Sh } x$ que varía entre 0,1 y 1,0. Con ayuda de la escala continuación Sh 2 se encuentran los valores de $\text{Sh } x$ de 1 a 10 para argumentos comprendidos entre 0,881 y 3,0.

Para $x > 3$ vale $\text{Sh } x \approx \frac{e^x}{2}$, para $x < 0,1$ vale $\text{Sh } x \approx x$

Ejemplos:

1) $\text{Sh } 0,349 = 0,356$

2) $\text{Sh } 0,885 = 1,005$

3) $\text{Sh } 1,742 = 2,767$



Fig. 52 Seno hiperbólico

Realizando las operaciones en sentido inverso se encuentra, naturalmente, el argumento en radianes a partir de un valor dado de la función.

$\text{Sh } x = 2,767$ corresponde $x = \text{Arg Sh } 2,767 = 1,742$

16.2 La escala Th

sirve para argumentos x desde 0,1 hasta 3,0, que corresponden a valores de la función $\text{Tgh } x$ desde 0,1 hasta 0,995 leídos en la escala D.

Para $x > 3$ vale $\text{Tgh } x \approx 1 - 2e^{-2x} \approx 1$

para $x < 0,1$ vale $\text{Tgh } x \approx x$

Ejemplos: $\text{Tgh } 0,257 = 0,251$

$\text{Tgh } 1,614 = 0,924$

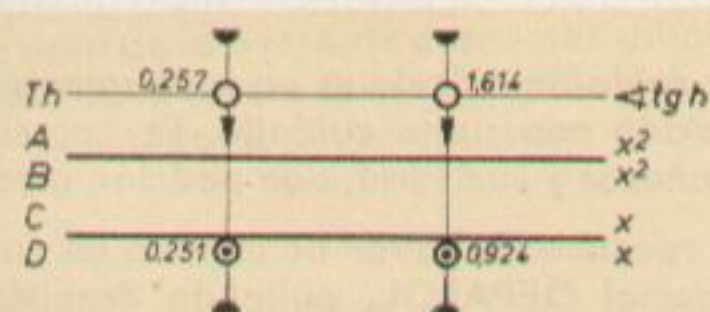


Fig. 53 Tangente hiperbólica

16.3 Fórmulas básicas de las funciones hiperbólicas

Para hallar los valores de las cofunciones hiperbólicas es necesario conocer la relación existente entre las diversas funciones hiperbólicas

$$\text{Sh } x = \frac{1}{2}(e^{+x} - e^{-x})$$

$$\text{Ch } x = \frac{1}{2}(e^{+x} + e^{-x})$$

$$\text{Tgh } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}$$

$$\text{Tgh } x \cdot \text{Ctgh } x = 1$$

De esta manera las escalas Sh y Th también permiten el cálculo de las cofunciones.

$$\text{Sh } x + \text{Ch } x = e^x$$

$$-\text{Sh } x + \text{Ch } x = e^{-x}$$

$$\text{Tgh } x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$$

16.4 Ctgh x

El valor de la función $\text{Ctgh } x$ se leerá en la escala DI después de haber colocado x en la escala Th, de acuerdo con la relación $\text{Ctgh } x = \frac{1}{\text{Tgh } x}$

Ejemplos:

$\text{Tgh } 0,549 = 0,500$

Para $x < 0,1$ vale $\text{Ctgh } x \approx \frac{1}{x}$

$\text{Ctgh } 0,549 = 2,000$

Para $x > 3$ vale $\text{Ctgh } x \approx 1$

16.5 Ch x

El cálculo del coseno hiperbólico es algo más complicado, siendo posibles varios caminos:

a) $\text{Ch } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Tgh } x}$ b) $\text{Ch } x = \sqrt{\text{Sh}^2 x + 1}$

c) $\text{Ch } x = 1 + 2\left(\text{Sh } \frac{x}{2}\right)^2$

La figura 54 muestra el camino a seguir para $\text{Ch } 0,437$ cuando se hace mediante la división $\text{Sh } x : \text{Tgh } x$. El cálculo comienza colocando el denominador $\text{Tgh } x$, es decir con la ayuda del cursor se coloca el extremo inicial o final de la reglilla frente al valor del argumento leído en la escala Th. Encima de este mismo argumento, leído ahora en la escala Sh, se encuentra en la escala C el valor de la función $\text{Ch } x$

$$\text{Ch } 0,437 = \frac{\text{Sh } 0,437}{\text{Tgh } 0,437} = 1,097$$

Escrito como proporción:

$$\frac{\text{Tgh } 0,437}{1} = \frac{\text{Sh } 0,437}{\text{Ch } 0,437}$$

Como ejemplo del segundo camino tomamos el cálculo

$$\text{Ch } 1,5 = \sqrt{\text{Sh}^2 1,5 + 1} = 2,352$$

Siguiendo el esquema de la fig. 55 vemos que se coloca el cursor sobre el argumento $x = 1,5$ leído en la escala Sh 2, con lo cual se lee en A el valor de $\text{Sh}^2 x$. A esta lectura se suma mentalmente la unidad y se efectúa el desplazamiento del cursor al valor $\text{Sh}^2 x + 1$, leído en la misma escala A; ahora se lee la solución, bajo el trazo del cursor, en la escala D. Este camino es sencillo pero exige poner especial atención en el número de cifras enteras del cuadrado con el fin de sumar correctamente la unidad. La ventaja de este segundo camino consiste en que el proceso de cálculo es reversible y sirve para calcular el argumento a partir del valor de la función.

Ejemplos:

$\text{Ch } 0,2 = 1,02$; $\text{Ch } 1,0 = 1,543$; $\text{Arg Ch } 2,5 = \text{Arg Sh } \sqrt{2,5^2 - 1} = 1,567$

Para $x < 0,1$ se tiene $\text{Ch } x \approx 1$ Para $x > 3$ se tiene $\text{Ch } x \approx \frac{e^x}{2}$

17. Funciones hiperbólicas de argumento complejo

Para el cálculo de valores de las funciones hiperbólicas de argumento complejo, deben tenerse en cuenta las siguientes fórmulas tomadas de la literatura:

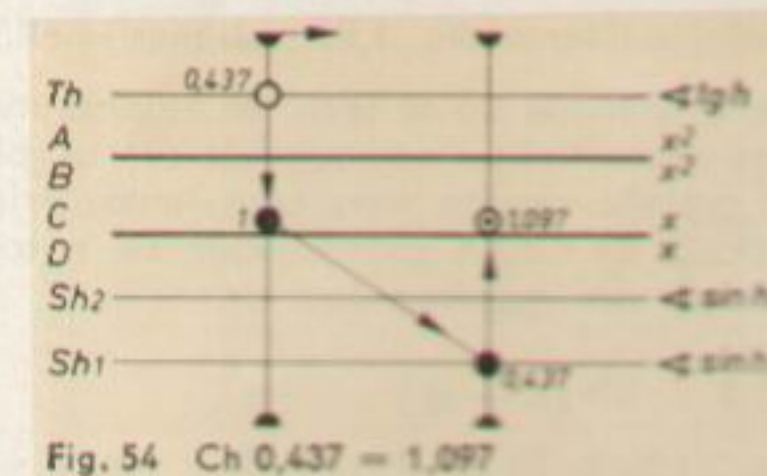


Fig. 54 $\text{Ch } 0,437 = 1,097$

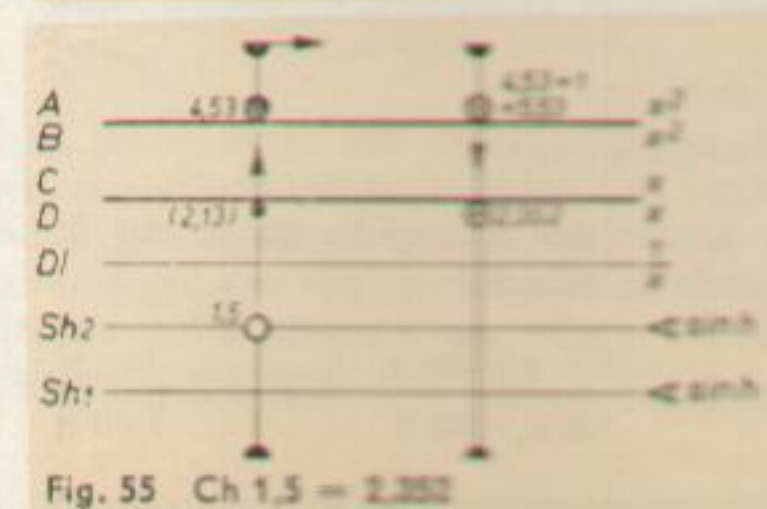


Fig. 55 $\text{Ch } 1,5 = 2,352$

$$\begin{aligned}
a) \operatorname{Sh}(x \pm jy) &= \operatorname{Sh} x \cdot \cos y \pm j \cdot \operatorname{Ch} x \cdot \sin y \\
b) \operatorname{Ch}(x \pm jy) &= \operatorname{Ch} x \cdot \cos y \pm j \cdot \operatorname{Sh} x \cdot \sin y \\
c) \sin(x \pm jy) &= \sin x \cdot \operatorname{Ch} y \pm j \cdot \cos x \cdot \operatorname{Sh} y \\
d) \cos(x \pm jy) &= \cos x \cdot \operatorname{Ch} y \mp j \cdot \sin x \cdot \operatorname{Sh} y \\
e) \operatorname{Tgh}(x \pm jy) &= \frac{\operatorname{Tgh} x \pm j \cdot \tan y}{1 \pm j \cdot \operatorname{Tgh} x \cdot \tan y} \\
f) \tan(x \pm jy) &= \frac{\tan x \pm j \cdot \operatorname{Tgh} y}{1 \mp j \cdot \tan x \cdot \operatorname{Tgh} y}
\end{aligned}$$

Al calcular con estas fórmulas debe tenerse en cuenta que los argumentos de las funciones en cuestión pueden venir dados tanto en grados como en radianes. Las fórmulas (a) hasta (d) rinden directamente la función compleja en la forma de componentes $a + jb$. La cual puede transformarse en la forma polar r/φ en la forma acostumbrada (ver par. 12).

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sh}(0,25 + j 12,7^\circ) &= \operatorname{Sh} 0,25 \cdot \cos 12,7^\circ \pm j \cdot \operatorname{Ch} 0,25 \cdot \sin 12,7^\circ \\
&= 0,2526 \cdot 0,976 + j \cdot 1,031 \cdot 0,2198 \\
&= 0,2464 + j \cdot 0,2267 \\
&= 0,335 / 42,6^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(1,05 + j 0,61) &= \sin 60,2^\circ \cdot \operatorname{Ch} 0,61 + j \cdot \cos 60,2^\circ \cdot \operatorname{Sh} 0,61 \\
&= 1,035 + j 0,322 = 1,083 / 17,3^\circ
\end{aligned}$$

Cálculo intermedio: $1,05$ radianes $= 60,2^\circ$.

Naturalmente no se leen los valores individuales de todas las funciones, sino que se multiplica todo seguido con la colocación de las escalas; a pesar de esto el cálculo resulta mas bien lento, principalmente por lo poco cómodo del cálculo de Ch . A continuación se indica un método que permite efectuar el cálculo con más rapidez.

17.1 $\operatorname{Sh}(x + jy)$

La fórmula $\operatorname{Sh}(x + jy) = \operatorname{Sh} x \cdot \cos y + j (\operatorname{Ch} x \cdot \sin y)$ permite ser representada, como es sabido, en forma vectorial cuyos dos componentes son (fig. 56):

$$\begin{aligned}
a &= \operatorname{Sh} x \cdot \cos y \\
b &= \operatorname{Ch} x \cdot \sin y
\end{aligned}$$

A partir del triángulo de la fig. 56 puede calcularse:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Ch} x \cdot \sin y}{\operatorname{Sh} x \cdot \cos y}, \quad \tan \varphi = \frac{\tan y}{\operatorname{Tgh} x}$$

Esto corresponde a un triángulo semejante al de la fig. 57 (el mismo ángulo φ), pero los lados son ahora $\tan y$ y $\operatorname{Tgh} x$.

La nueva fórmula no contiene el indeseado valor $\operatorname{Ch} x$ y permite un cálculo más rápido de los valores buscados φ y r , pues al conocer φ por la ecuación de $\tan \varphi$, se tiene:

$$r = \frac{\operatorname{Sh} x \cdot \cos y}{\cos \varphi}$$

Esta ecuación se puede leer también de la fig. 56 y elevando al cuadrado los lados de dicho triángulo se tiene para comprobación: $r^2 = \operatorname{Sh}^2 x + \sin^2 y$.

El problema de la división $\tan \varphi = \frac{\tan y}{\operatorname{Tgh} x}$, sencillo en sí, presenta alguna dificultad cuando se busca el camino más corto. Como sea que las escalas ST y T

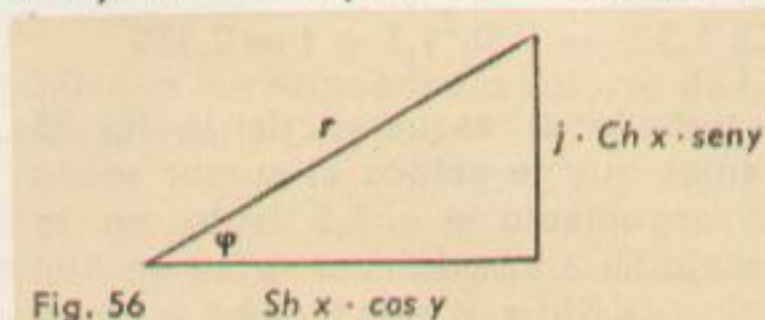


Fig. 56

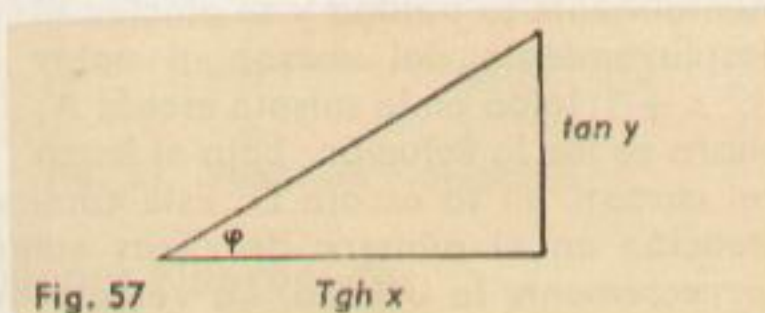


Fig. 57

trabajan con la C para ángulos $< 45^\circ$, pero con las DI o CI para ángulos $> 45^\circ$, resultan diferentes colocaciones según el valor de los argumentos φ y y .

El mejor método de evitar errores en la lectura es aquí una operación aproximada con valores redondeados

Ejemplo: $\operatorname{Sh}(0,25 + j 12,7^\circ)$

Un vistazo a las escalas Th y T indica que $\tan 12,7^\circ$ queda a la izquierda de $\operatorname{Tgh} 0,25$ o sea que es menor. Por tanto $\tan \varphi < 1$ y $\varphi < 45^\circ$.

$$\tan \varphi = \frac{\tan 12,7^\circ}{\operatorname{Tgh} 0,25} \text{ o, pasando a proporción } \frac{\operatorname{Tgh} 0,25}{\tan 12,7^\circ} = \frac{1}{\tan \varphi}$$

Esta última forma es más apropiada para la regla de cálculo, pues basta colocar uno sobre otro los valores 0,25 de la escala Th y el $12,7^\circ$ de la escala T, para leer φ en la escala T sobre el final del cuerpo.

$$\tan \varphi = \frac{\tan 12,7^\circ}{\operatorname{Tgh} 0,25}$$

Cálculo aproximado:

$$\tan \varphi \approx \frac{0,2}{0,25} \approx 0,8 \quad \varphi \approx 40^\circ$$

$$r = \frac{\operatorname{Sh} 0,25}{\cos 42,6^\circ} \cdot \cos 12,7^\circ = 0,335$$

comprobación:

$$r = \sqrt{\operatorname{Sh}^2 0,25 + \sin^2 12,7^\circ}$$

$$r = \sqrt{0,0484 + 0,0639} = 0,335$$

Resultado:

$$\operatorname{Sh}(0,25 + j 12,7^\circ) = 0,335 / 42,6^\circ$$

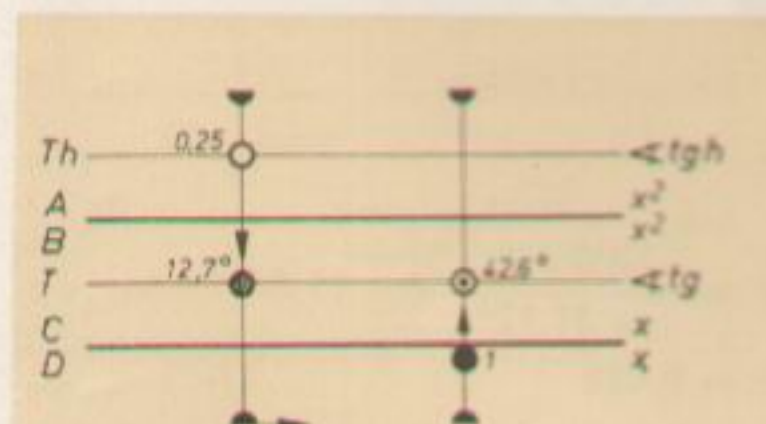


Fig. 58

$$\varphi = 42,6^\circ$$

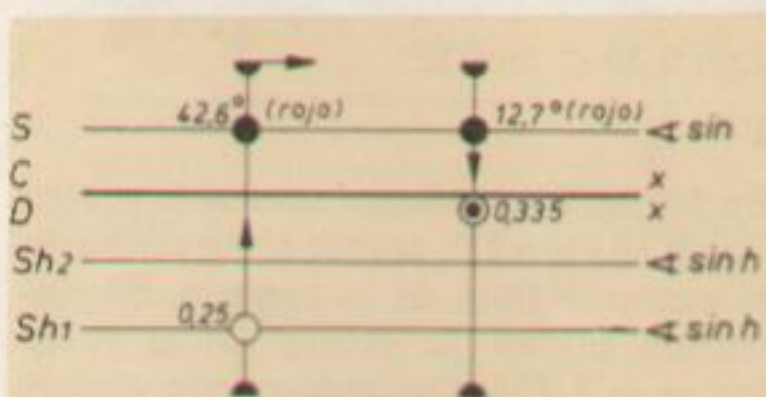


Fig. 59

$$r = 0,335$$

Para hacer posible esta rápida solución para todas las combinaciones de ángulos, se han resumido todas las posiciones y lecturas en la tabla que sigue. El que tenga que efectuar frecuentemente tales cálculos, dominará pronto el método y ahorrará mucho tiempo. El que tenga que realizarlos solo de tarde en tarde, llegará al final con más seguridad si lee primero los valores de las funciones $\operatorname{Tgh} x$ y $\tan y$, efectuando después la división.

$$\text{Cálculo de } \tan \varphi = \frac{\tan y}{\operatorname{Tgh} x}$$

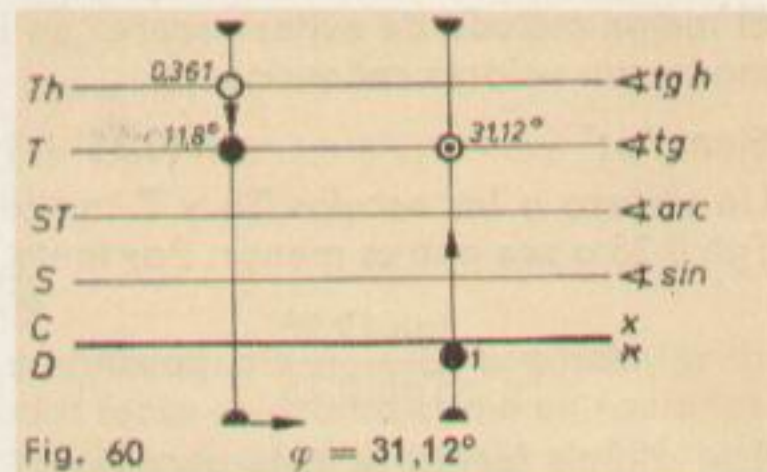
y	x	1ª posición "y" en	2ª posición cursor	lectura φ	φ
$5,5^\circ - 45^\circ$	$\operatorname{Tgh} x > \tan y$	T bajo x en Th	en extremo final D	en T	$< 45^\circ$
$5,5^\circ - 45^\circ$	$\operatorname{Tgh} x < \tan y$	T bajo x en Th	en extremo final C, después reglilla en posición básica	en T (rojo)	$> 45^\circ$
$< 5,5^\circ$	$\operatorname{Tgh} x < 10 \cdot \tan y$	ST bajo x en Th	sobre extremo inicial D	en T	$> 5,5^\circ$
$< 5,5^\circ$	$\operatorname{Tgh} x > 10 \cdot \tan y$	ST bajo x en Th	sobre extremo final D	en ST	$< 5,5^\circ$
$> 45^\circ$	$10 \cdot \operatorname{Tgh} x > \tan y$	T (rojo) sobre final escala D	en x de Th	en T (rojo)	$> 45^\circ$
$> 45^\circ$	$10 \cdot \operatorname{Tgh} x < \tan y$	T (rojo) sobre inicial escala D	en x de Th	en ST (sentido inverso)	$> 45^\circ$

El cálculo de la hipotenusa $r = \frac{\operatorname{Sh} x}{\cos \varphi} \cdot \cos y$ no ofrece dificultad, si se atiende a

que los valores de los cosenos deben colocarse en la escala S usando la numeración roja.

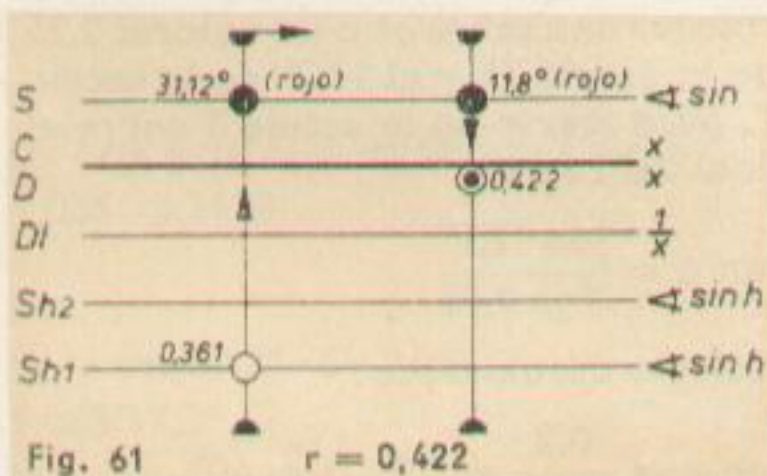
Ejemplos de aplicación de la tabla anterior:

1.
 $\text{Sh } (0,361 + j 11,8^\circ) = 0,422 / 31,12^\circ$
 $\text{Tgh } 0,361 > \tan 11,8^\circ$
 $\varphi = 31,12^\circ$



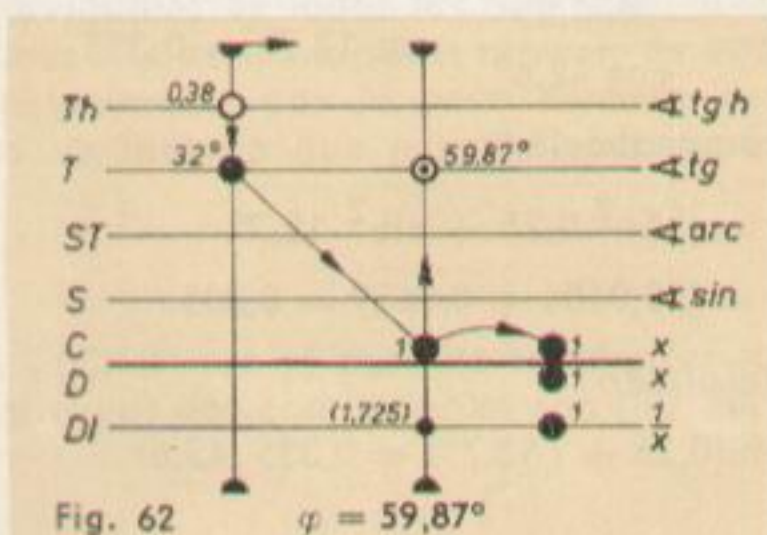
$$r = \frac{\text{Sh } 0,361}{\cos 31,12^\circ} \cdot \cos 11,8^\circ$$

 $r = 0,422$

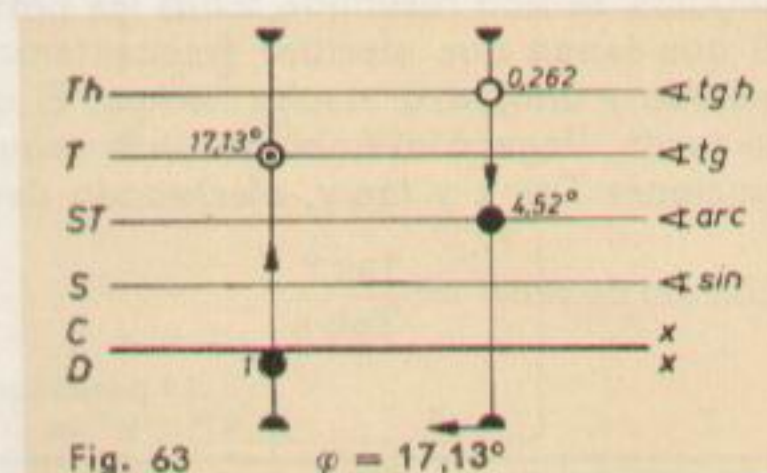


2.
 $\text{Sh } (0,38 + j 32^\circ) = 0,657 / 59,87^\circ$
 $\text{Tgh } 0,38 < \tan 32^\circ$
 $\varphi = 59,87^\circ$

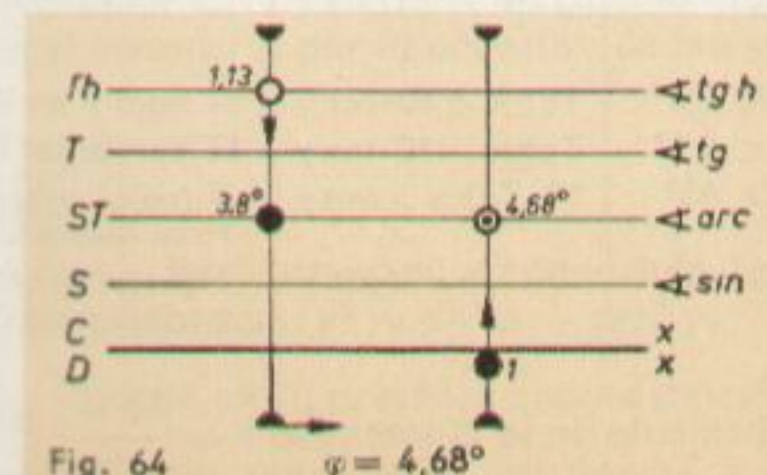
En la fig. 62: colocar uno sobre otro $\text{Tgh } 0,38$ y $\tan 32^\circ$, correr el cursor hasta el extremo final de la reglilla, encontrando así en la escala DI el valor $\tan \varphi = 1,725$. Dejando ahora el cursor en esta posición, llevar la reglilla a la posición básica, para poder leer en la escala T el ángulo $\varphi = 59,87^\circ$.



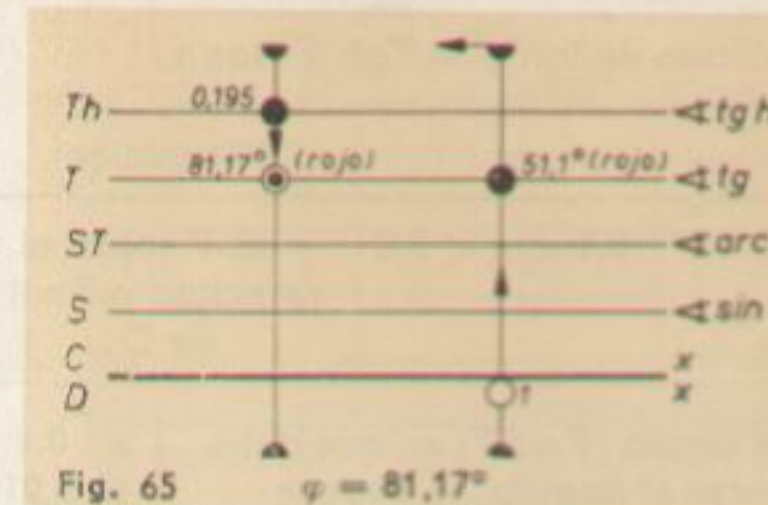
3.
 $\text{Sh } (0,262 + j 4,52^\circ) = 0,2764 / 17,13^\circ$
 $\text{Tgh } 0,262 < 10 \cdot \tan 4,52^\circ$
 $\varphi = 17,13^\circ$



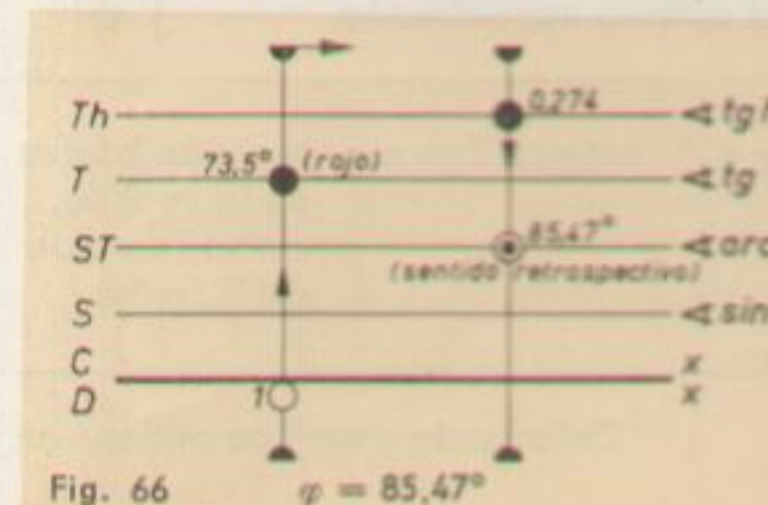
4.
 $\text{Sh } (1,13 + j 3,8^\circ) = 1,388 / 4,68^\circ$
 $\text{Tgh } 1,13 > 10 \cdot \tan 3,8^\circ$
 $\varphi = 4,68^\circ$



5.
 $\text{Sh } (0,195 + j 51,1^\circ) = 0,8025 / 81,17^\circ$
 $10 \cdot \text{Tgh } 0,195 > \tan 51,1^\circ$
 $\varphi = 81,17^\circ$

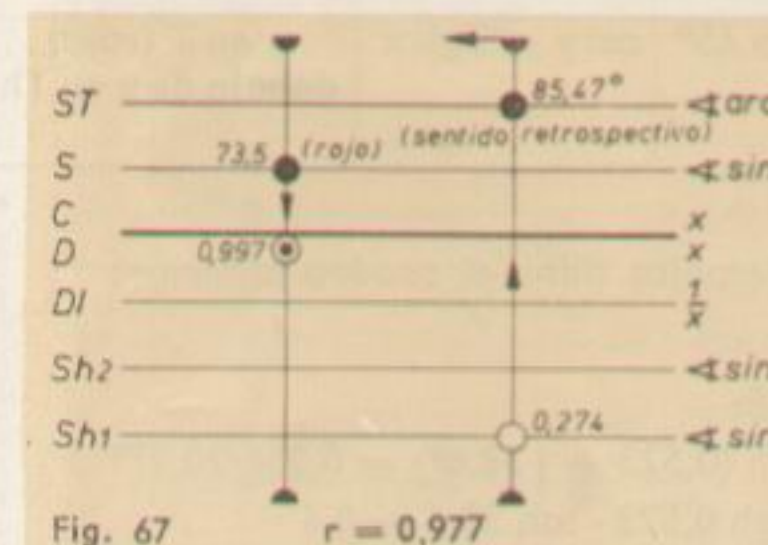


6.
 $\text{Sh } (0,274 + j 73,5^\circ) = 0,997 / 85,47^\circ$
 $10 \cdot \text{Tgh } 0,274 < \tan 73,5^\circ$
 $\varphi = 85,47^\circ$



$$r = \frac{\text{Sh } 0,274}{\cos 85,47^\circ} \cdot \cos 73,5^\circ$$

 $r = 0,997$



17.2 Ch (x + jy)

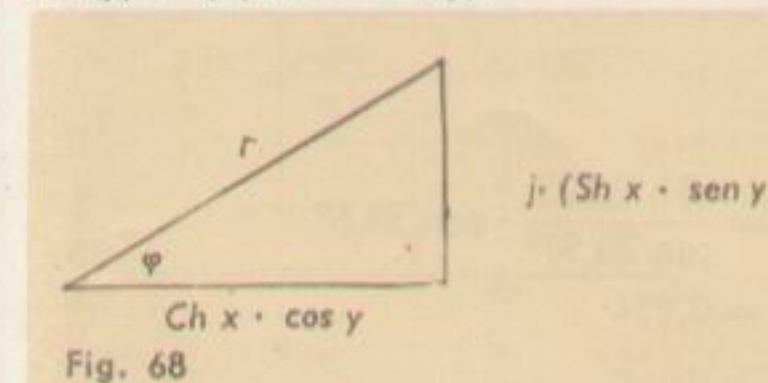
El cálculo del coseno hiperbólico de argumento complejo se realiza de una manera análoga.

$$\text{Ch } (x + jy) = (\text{Ch } x \cdot \cos y) + j (\text{Sh } x \cdot \sin y)$$

(a) $\tan \varphi = \text{Tgh } x \cdot \tan y$

(b) $r = \frac{\text{Sh } x \cdot \sin y}{\sin \varphi}$

(c) $r^2 = \text{Sh}^2 x + \cos^2 y$



La ecuación (c) ofrece de nuevo la posibilidad de calcular r sin conocer el ángulo φ , imaginando un triángulo rectángulo de catetos $\text{Sh } x$ y $\cos y$, con hipotenusa r . Sin embargo, por regla general, se buscan ambos valores φ y r . Con la ecuación (a) se calcula el ángulo φ y con la ecuación (b) la hipotenusa r . El cálculo de r no ofrece dificultad alguna, pero la doble función tangente de la ecuación (a) exige alguna reflexión, especialmente cuando los ángulos son $> 45^\circ$.

Cuando estas operaciones se realizan solo de tarde en tarde, es preferible realizar los cálculos paso a paso aunque ello sea molesto. Para aquellos que la realizan con mucha frecuencia el cuadro sinóptico que sigue permite rapidez y seguridad en el cálculo de $\text{Ch } (x + jy)$. De todos modos siempre debe comenzarse por un cálculo aproximado.

Cálculo de $\tan \varphi = \text{Tgh } x \cdot \tan y$

y	x	1ª posición	2ª posición	lectura φ	φ
$< 45^\circ$	$0,1 < x < 3,0$	y en T sobre el principio o final de D	cursor en x de Th	en T o ST (negro)	$< 45^\circ$

La escala (T o ST) en que debe leerse el ángulo, se deduce del cálculo aproximado.

a) $0,1 < \text{Tgh } x \cdot \tan y < 1$	en T	$< 45^\circ$
b) $0,01 < \text{Tgh } x \cdot \tan y < 0,1$	en ST	$< 5,7^\circ$
c) $\text{Tgh } x \cdot \tan y < 0,01$	en ST	$< 0,57^\circ$

$> 45^\circ$	$\cot y > \text{Tgh } x$	posición básica de la reglilla, cursor en y de T (rojo)	final derecho de la reglilla bajo raya del cursor	Cursor en x de Th, debajo en T (negro)	$< 45^\circ$
--------------	--------------------------	---	---	--	--------------

Colocando y en T se obtiene en C el valor de $\cot y$

$> 45^\circ$	$\cot y < \text{Tgh } x$	y en T (rojo) debajo de x en Th	cursor sobre final de D	en T (rojo)	$> 45^\circ$
--------------	--------------------------	---------------------------------	-------------------------	-------------	--------------

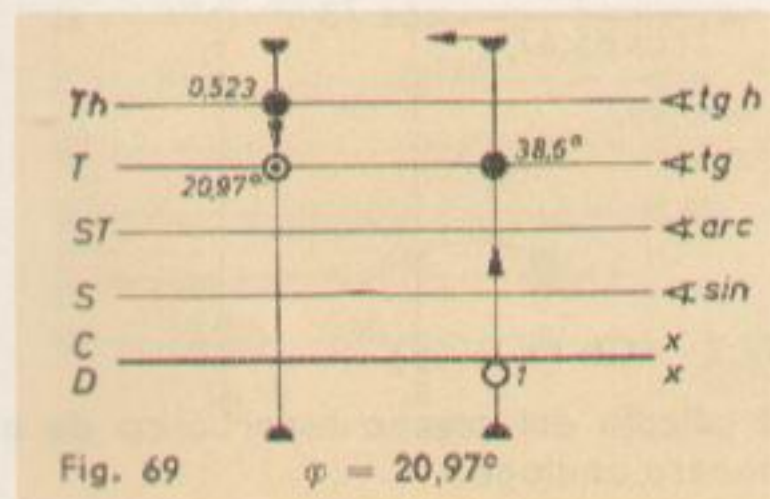
Ejemplos para el cuadro anterior:

1 a.

$$\text{Ch } (0,523 + j 38,6^\circ) = 0,954/20,97^\circ$$

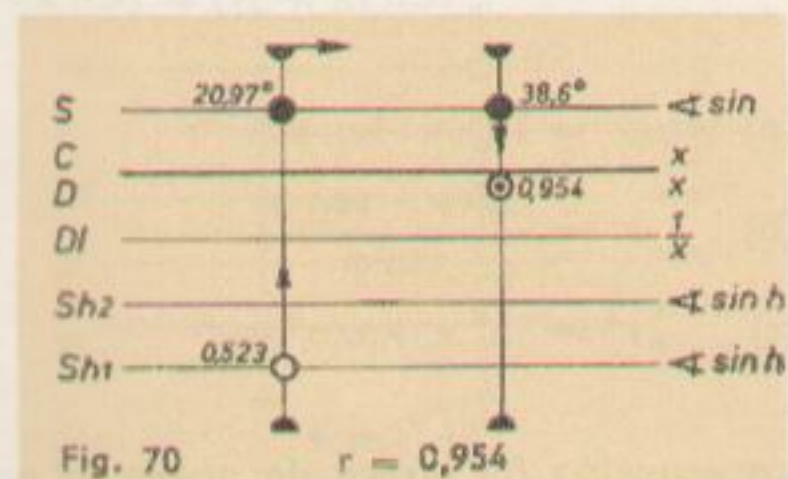
$$\text{Tgh } 0,523 \cdot \tan 38,6 \approx 0,4$$

$$\varphi = 20,97^\circ$$



$$r = \frac{\text{Sh } 0,523}{\text{sen } 20,97^\circ} \cdot \text{sen } 38,6^\circ$$

$$r = 0,954$$

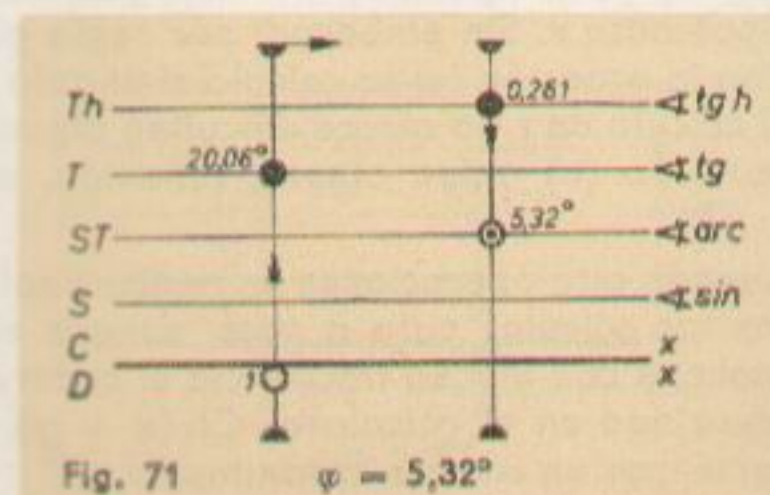


1 b.

$$\text{Ch } (0,261 + j 20,06^\circ) = 0,976/5,32^\circ$$

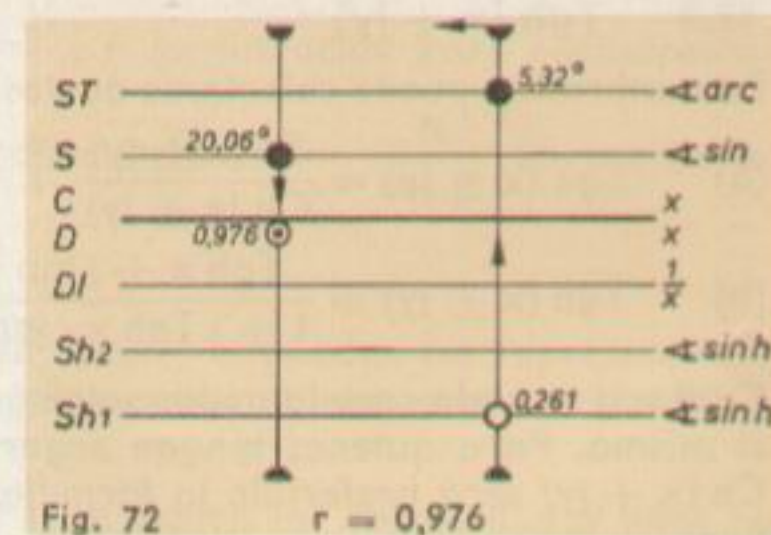
$$\text{Tgh } 0,261 \cdot \tan 20,06^\circ \approx 0,09$$

$$\varphi = 5,32^\circ$$



$$r = \frac{\text{Sh } 0,261}{\text{sen } 5,32^\circ} \cdot \text{sen } 20,06^\circ$$

$$r = 0,976$$

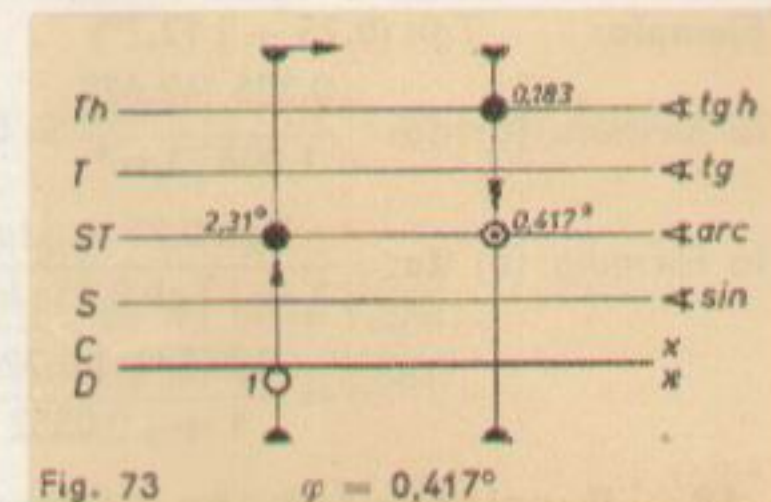


1 c.

$$\text{Ch } (0,183 + j 2,31^\circ) = 1,020/0,417^\circ$$

$$\text{Tgh } 0,183 \cdot \tan 2,31^\circ \approx 0,008$$

$$\varphi = 0,417^\circ$$



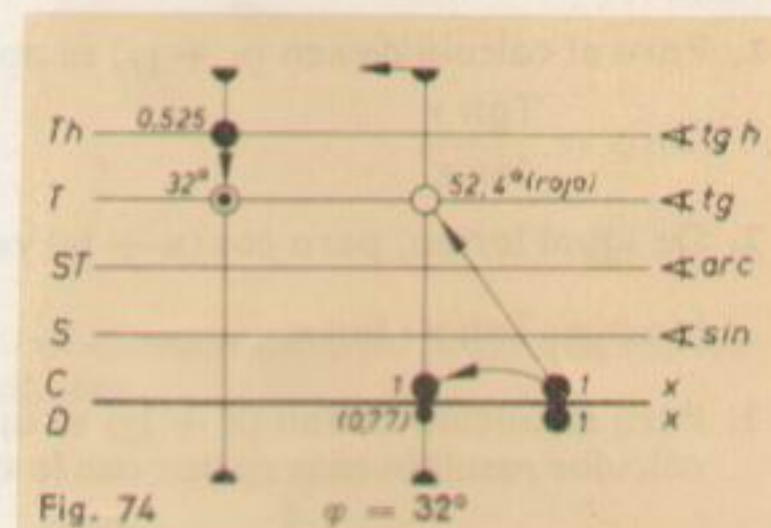
2.

$$\text{Ch } (0,525 + j 52,4^\circ) = 0,821/32^\circ$$

$$\cot 52,4^\circ > \text{Tgh } 0,525$$

$$\varphi = 32^\circ$$

En la fig. 74: En la posición básica de la reglilla colocar $\tan 52,4^\circ$ en la escala T con el cursor, después colocar el 1 de la reglilla bajo la raya del cursor.

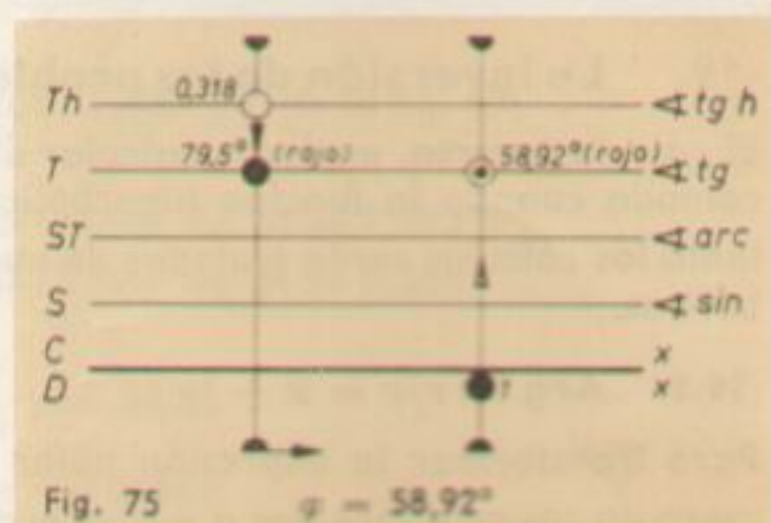


3.

$$\text{Ch } (0,318 + j 79,5^\circ) = 0,371/58,92^\circ$$

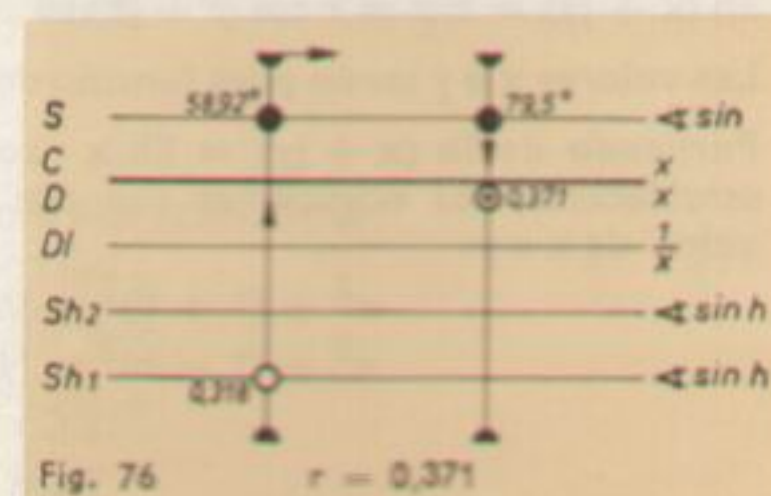
$$\cot 79,5^\circ < \text{Tgh } 0,318$$

$$\varphi = 58,92^\circ$$



$$r = \frac{\text{Sh } 0,318}{\text{sen } 58,92^\circ} \cdot \text{sen } 79,5^\circ$$

$$r = 0,371$$



17.3 Tgh (x + jy)

Esta expresión puede calcularse de dos maneras:

$$(a) \quad \text{Tgh } (x \pm jy) = \frac{\text{Sh } (x \pm jy)}{\text{Ch } (x \pm jy)}$$

$$(b) \quad \text{Tgh } (x \pm jy) = \frac{\text{Tgh } x \pm j \tan y}{1 \pm j \text{Tgh } x \cdot \tan y}$$

Cual sea en cada caso la mejor solución, es cosa que cada uno debe decidir por sí mismo. Para quienes tengan seguridad en el cálculo de $\text{Sh } (x + jy)$ y de $\text{Ch } (x + jy)$ será preferible la fórmula (a), ya que conduce más rápidamente al final.

Ejemplo: $\text{Tgh } (0,25 + j 12,7^\circ)$

$$\text{la fórmula (a) da: } \frac{0,335 / 42,62^\circ}{1,008 / 3,16^\circ} = 0,333 / 39,46^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{la fórmula (b) da: } & \frac{\text{Tgh } 0,25 + j \tan 12,7^\circ}{1 + j \text{Tgh } 0,25 \cdot \tan 12,7^\circ} = \frac{0,245 + j 0,225}{1 + j 0,245 \cdot 0,225} \\ & = \frac{0,245 + j 0,225}{1 + j 0,0552} = \frac{0,333 / 42,62^\circ}{1,00 / 3,16^\circ} = 0,333 / 39,46^\circ \end{aligned}$$

18. Funciones trigonométricas de argumento complejo

1. Para el cálculo de $\text{sen } (x + jy)$ se aplican las fórmulas:

$$\tan \varphi = \frac{\text{Tgh } y}{\tan x} \quad r = \frac{\text{Sh } y \cdot \cos x}{\text{sen } \varphi}$$

2. De igual forma, para $\text{cos } (x + jy)$ valen las fórmulas:

$$\tan \varphi = \text{Tgh } y \cdot \tan x \quad r = \frac{\text{Sh } y \cdot \text{sen } x}{\text{sen } \varphi}$$

3. Para el cálculo de $\tan (x + jy)$ se aplica la fórmula (f) de la pag. 32 pero los cálculos resultan más cortos con la división:

$$\tan (x + jy) = \frac{\text{sen } (x + jy)}{\text{cos } (x + jy)}$$

19. La inversión de los problemas tratados anteriormente

El cálculo inverso, es decir, calcular el argumento complejo $x + jy$ es muy incómodo cuando la función hiperbólica se da en la forma polar r/φ . Por lo tanto los cálculos serán tratados de nuevo con detalle para las funciones hiperbólicas.

19.1 Arg Sh $r/\varphi = x + jy$

Para transformar la expresión polar r/φ en $\text{Sh } (x + jy)$, se descompone primero en sus componentes a y b , operación que no presenta ninguna dificultad.

$$\text{Sh } (x + jy) = r/\varphi = r \cos \varphi + jr \text{sen } \varphi = a + jb$$

Los valores x e y serán pues función de a y b .

Partiendo de $\text{Sh } (x + jy) = \text{Sh } x \cdot \cos y + j \text{Ch } x \cdot \text{sen } y = a + jb$ pueden establecerse dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde puede hallarse el valor de x e y :

$$\begin{aligned} a^2 + (1 + b)^2 &= M^2 = (\text{Ch } x + \text{sen } y)^2 \\ a^2 + (1 - b)^2 &= N^2 = (\text{Ch } x - \text{sen } y)^2 \\ 2 \text{Ch } x &= M + N \\ 2 \text{sen } y &= M - N \end{aligned}$$

y se empieza el cálculo por $\text{sen } y = \frac{M - N}{2}$. A continuación para encontrar el

valor de x resulta más apropiada la ecuación $\text{Sh } x = \frac{a}{\cos y}$ en vez de la

$$\text{Ch } x = \frac{M + N}{2}$$

Según las ecuaciones anteriores los valores de M y N pueden ser representados como hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son a y $(1 + b)$ o bien a y $(1 - b)$.

El cálculo de la hipotenusa resulta fácil si se siguen las reglas dadas para la fig. 29. El ángulo que aparece allí no tiene ahora ningún interés.

Ejemplo:

$\text{Sh } (x + jy) = 0,422 / 31,12^\circ$ (comparar con el ejemplo 1 de la pag. 34), buscado x e y

$$0,422 / 31,12^\circ = a + jb = 0,361 + j 0,218$$

Triángulo con $a = 0,361$ y $1 + b = 1,218$ nos da $M = 1,270$

Triángulo con $a = 0,361$ y $1 - b = 0,782$ nos da $N = 0,861$

$$M - N = 0,409$$

$$\frac{1}{2} (M - N) = 0,2045 = \text{sen } y \quad y = 11,8^\circ$$

$$\text{Sh } x = \frac{0,361}{\cos 11,8^\circ} \quad x = 0,361$$

$$0,422 / 31,12^\circ = \text{Sh } (0,361 + j 11,8^\circ)$$

19.2 Arg Ch $r/\varphi = x + jy$

El proceso de cálculo es el mismo que en el ejemplo anterior, solo que las fórmulas para los cosenos hiperbólicos son ahora:

$$\begin{aligned} M^2 &= (1 + a)^2 + b^2 & \cos y &= \frac{1}{2} (M - N) \\ N^2 &= (1 - a)^2 + b^2 & \text{Sh } x &= \frac{b}{\text{sen } y} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$\text{Ch } (x + jy) = 0,954 / 20,97^\circ$ (compárese con el ejemplo de la fig. 69).

$$a + jb = 0,892 + j 0,3413$$

Triángulo con $1 + a = 1,892$ y $b = 0,3413$ nos da $M = 1,922$

Triángulo con $1 - a = 0,108$ y $b = 0,3413$ nos da $N = 0,358$

$$M - N = 1,564$$

$$\frac{1}{2} (M - N) = 0,782 = \cos y \quad y = 38,6^\circ$$

$$\text{Sh } x = \frac{0,3413}{\text{sen } 38,6^\circ} \quad x = 0,523$$

$$0,954 / 20,97^\circ = \text{Ch } (0,523 + j 38,6^\circ)$$

19.3 Arg Tgh $r/\varphi = x + jy$

Para calcular el valor de x e y hay de nuevo dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Tgh } 2x &= \frac{2r \cos \varphi}{1 + r^2} = \frac{2 \cos \varphi}{1/r + r} \\ \tan 2y &= \frac{2r \text{sen } \varphi}{1 - r^2} = \frac{2 \text{sen } \varphi}{1/r - r} \end{aligned}$$

Ejemplo: $0,333 / 39,46^\circ = \text{Tgh } (x + j y)$

$$\begin{aligned} \text{Tgh } 2x &= \frac{2 \cdot \cos 39,46^\circ}{3,004 + 0,333}; & 2x &= 0,500 & x &= 0,25 \\ \tan 2y &= \frac{2 \cdot \sin 39,46^\circ}{3,004 - 0,333}; & 2y &= 25,4^\circ & y &= 12,7^\circ \\ 0,333 / 39,46^\circ &= \text{Tgh } (0,25 + j 12,7^\circ) \end{aligned}$$

El cálculo de los quebrados y la lectura de los valores $2x$ en la escala Th y el $2y$ en la T no ofrecen dificultad alguna, teniendo en cuenta las indicaciones de la pag. 30. Para el cálculo de $1/r$ se hará uso de las escalas D y DI o de las exponenciales e^{+x} y e^{-x} según, sea más conveniente, como escalas recíprocas.

20. Ejemplos de aplicación

A continuación se muestran las ventajas de la regla de cálculo ARISTO-HyperboLog mediante algunos ejemplos típicos tomados de la Electrotécnica. Dado que existe mucha discrepancia en los símbolos empleados por la Electrotécnica en sus fórmulas, empezaremos dando una lista de los que usaremos aquí:

Significado correspondiente al tratamiento vectorial de las redes de cuatro terminales (cuadripolos):

$\mathcal{Z}$ impedancia imagen o aparente	a atenuación
$\mathcal{Z}_0$ impedancia característica	b defasado
$\mathcal{Z}_1$ impedancia a circuito abierto	p coeficiente de reflexión
$\mathcal{Z}_k$ impedancia en cortocircuito	α constante de atenuación
$g = a - jb$ función propagación	β constante de fase

En la teoría de las líneas de transmisión se usa además de los anteriores:

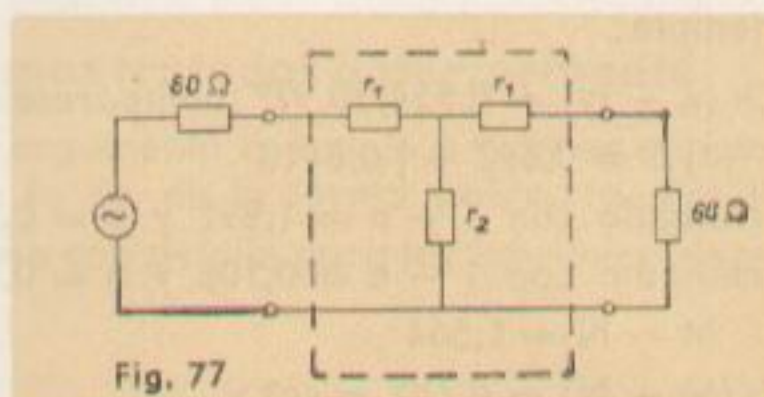
$$\gamma = \frac{g}{l} = \alpha + j\beta = \frac{a}{l} + j \frac{b}{l} = \text{constante de propagación.}$$

Ejemplo nº 1: Conexión de una red atenuadora

Entre una fuente (o emisor) y una carga (o receptor), ambos de impedancia igual a 60Ω , debe conectarse una red atenuadora con una atenuación de 1,5 nepers. Calcular las resistencias serie r_1 y la resistencia paralelo r_2 , supuesto que se adopta la configuración en T.

Se aplican las siguientes fórmulas de cuadripolos:

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{U}_1 &= \mathcal{U}_2 \text{Ch } g + \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_2 \text{Sh } g \\ (2) \quad \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_1 &= \mathcal{U}_2 \text{Sh } g + \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_3 \text{Ch } g \end{aligned}$$



Por el enunciado del problema se sabe que la función propagación debe ser $g = a + jb = 1,5 + j0$. Para el trabajo en vacío (salida en circuito abierto) se obtiene, a partir de la igualdad (1) la relación de transferencia de voltaje

$$(3) \quad \frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = \text{Ch } g = \text{Ch } 1,5 = 2,352 \quad (\text{véase fig. 54 o fig. 55})$$

A continuación, por división de las igualdades (1) y (2), se calcula la impedancia de entrada $\mathcal{Z}_1$ para trabajo en vacío.

$$\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_0} \text{Ctgh } g = \text{Ctgh } 1,5 = 1,105$$

Llevando el cursor de la regla de cálculo al valor 1,5 de la escala Th, se lee el resultado 1,105 en la escala DI, debajo mismo.

La relación de transferencia de voltaje puede también calcularse a partir del esquema de la red en T:

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 2,352; \quad \text{ver ecuación (3)}$$

De $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_0 \cdot \text{Ctgh } g = 60 \cdot 1,105 = 66,3 \Omega$ y $\mathcal{Z}_1 = r_1 + r_2 = 66,3 \Omega$, se deduce:

$$r_2 = \frac{66,3}{2,352} = 28,2 \Omega \quad r_1 = 66,3 - 28,2 = 38,1 \Omega$$

Ejemplo nº 2:

Calcular la impedancia a circuito abierto y la impedancia en cortocircuito de una línea de transmisión de cobre, de $0,2 \varnothing$ y 10 km de longitud. Los datos para la misma (según Vilbig o Möller) son:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= Z_0/p = 670 \Omega / -41,6^\circ \\ a &= 0,814 \text{ nepers (atenuación)} \\ b &= 0,843 \text{ radianes} = 48,3^\circ \text{ (defasado)} \\ g &= a + jb = 0,814 + j 48,3^\circ \text{ (función propagación)} \end{aligned}$$

Cálculo de la impedancia a circuito abierto:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \mathcal{Z}_0 \cdot \text{Ctgh } g \\ \mathcal{Z}_1 &= 670 / -41,6^\circ \cdot \text{Ctgh } (0,814 + j 48,3^\circ) \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{\text{Ch } (0,814 + j 48,3^\circ)}{\text{Sh } (0,814 + j 48,3^\circ)} \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{1,125 / 37^\circ}{1,173 / 59,1^\circ} = 642 / -63,7^\circ \\ \mathcal{Z}_1 &= (284,2 - j 575) \Omega \end{aligned}$$

Cálculo de la impedancia en cortocircuito:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k &= 670 / -41,6^\circ \cdot \text{Tgh } (0,814 + j 48,3^\circ) \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{1,173 / 59,1^\circ}{1,125 / 37^\circ} = 699 / -19,5^\circ \\ \mathcal{Z}_k &= (659 - j 233) \Omega \end{aligned}$$

Ejemplo nº 3:

Calcular la relación de transferencia de voltaje de un filtro pasa-bajos formado por seis secciones en T, todas iguales con resistencias en serie de $R = 10 \text{ k}\Omega$ y capacidad en paralelo de $C = 1 \mu\text{F}$, para la frecuencia de 50 c/s. Para un cuadripolo simétrico, la relación de transferencia de voltaje es siempre igual a

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = \text{Ch } g$$

En primer lugar vamos a utilizar esta igualdad para calcular la función propagación g de una sola sección.

Para $R = 10^4 \Omega$ e

$$Y = \omega \cdot C = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ resulta}$$

$$R \cdot Y = 3,14$$

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = 1 + j R Y = 1 + j 3,14 = \text{Ch } g$$

$$\text{Arg Ch } (1 + j 3,14) = g = x + jy$$

$$1 + j 3,14 = a + jb$$

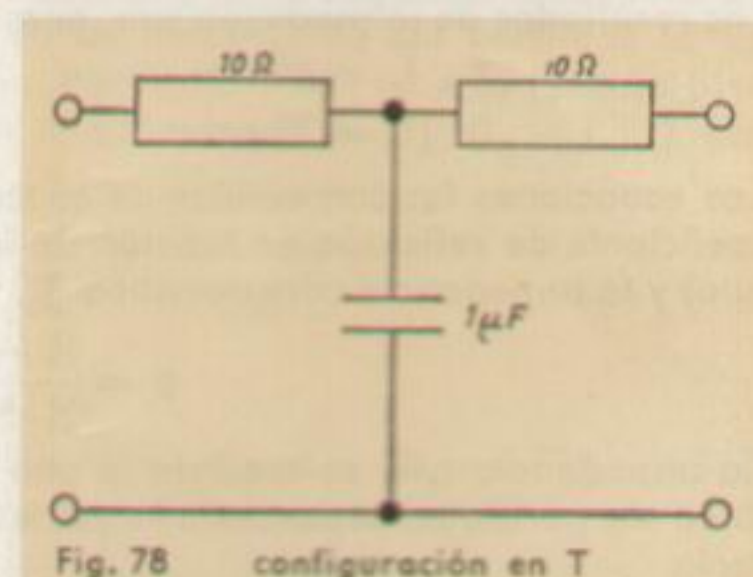
$$1 + a = 2 \quad b = 3,142 \quad M = 3,725$$

$$1 - a = 0 \quad b = 3,142 \quad N = 3,142$$

$$(M - N) = 0,583$$

$$\cos y = \frac{1}{2} (M - N) = 0,2915$$

$$\text{Sh } x = \frac{b}{\sin y} = \frac{3,142}{\sin 73,05^\circ} = 3,285$$



ver pag. 39

$$y = 73,05^\circ$$

$$x = 1,905$$

$$g = 1,905 + j 73,05^\circ$$

Sumando ahora las funciones de propagación de las seis secciones, encontraremos

$$6g = 11,43 + j 438,3^\circ = 11,43 + j 78,3^\circ$$

La salida después de las 6 secciones es U_1 y la relación buscada:

$$\frac{U_1}{U_{71}} = \text{Ch } 6g = \text{Ch } (11,43 + j 78,3^\circ) = r/\varphi$$

$$\tan \varphi = \text{Tgh } x \cdot \tan y$$

$$= 1 \cdot \tan y$$

$$\varphi = y = 78,3^\circ$$

$$r = \text{Sh } x \cdot \frac{\text{sen } y}{\text{sen } \varphi} = \text{Sh } x \cdot 1$$

$$r = \text{Sh } 11,43 \approx \frac{1}{2} e^{11,43} = \frac{1}{2} (e^{5,715})^2 = \frac{1}{2} 305^2 = 4,66 \cdot 10^4$$

$$\frac{U_1}{U_{71}} = 46600/78,3^\circ$$

Ejemplo n° 4:

Medida de la impedancia de entrada de una antena emisora o receptora. A unos alambres de Lecher de una impedancia característica de 60Ω se conecta un cable o línea de transmisión de impedancia característica $Z_0 = 60 \Omega$.

La antena, que se conectará al otro extremo, tiene una impedancia aparente cuyo valor y fase en función de la frecuencia se desea medir (aquí solo se realizará el cálculo correspondiente a un punto o frecuencia). Sea esta frecuencia 100 Mc/s que corresponde a una longitud de onda de 3 m.

Para eliminar la influencia de la línea de conexión en la medida, se colocan primeramente unas pinzas de cortocircuito al final de la línea de conexión (o sea a la entrada de la antena u objeto de medición) y se determina la situación l_1 del mínimo de voltaje, a partir del final de los alambres de Lecher, midiendo también el valor del mínimo y máximo de voltaje. Esto da $U_{\min} : U_{\max} = m_1$.

Finalmente se quita el cortocircuito de antes y se conecta la línea a la antena, procediendo a la segunda medida. En ella se obtienen los correspondientes valores l_2 y m_2 .

Los resultados de la medición son, pues:

$$\begin{array}{ll} l_1 = 40 \text{ cm} & m_1 = 0,15 \quad (\text{cortocircuito}) \\ l_2 = 70 \text{ cm} & m_2 = 0,70 \end{array}$$

Las ecuaciones fundamentales de la teoría de las líneas de transmisión dan el coeficiente de reflexión en función de la impedancia aparente Z (aquí la incógnita) y la impedancia característica Z_0 .

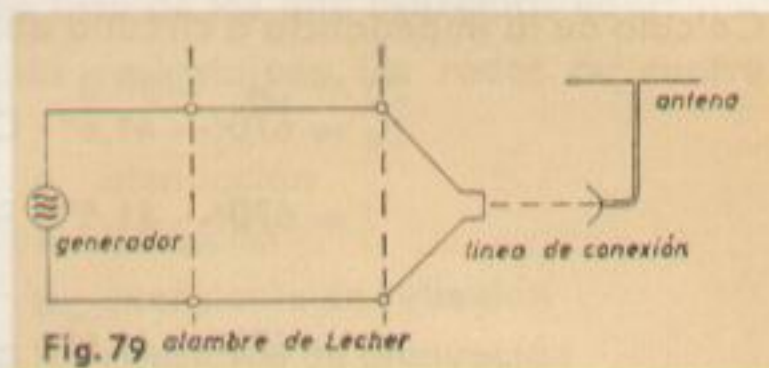
$$p = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = p/\psi$$

La impedancia que se mediría a una determinada distancia x del final de la línea sin pérdidas, separando la parte del conductor que queda a la izquierda, sería

$$\frac{Z_x}{Z_0} = \frac{U_x}{Z_0 Z_x} = \frac{e^{j\beta x} + p \cdot e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - p \cdot e^{-j\beta x}}$$

En el mínimo de voltaje $p \cdot e^{-j\beta x}$ está exactamente 180° fuera de fase respecto $e^{j\beta x}$, de manera que en este caso particular puede escribirse

$$\frac{Z_{x \min}}{Z_0} = \frac{1 + p/180^\circ}{1 - p/180^\circ} = \frac{1 - p}{1 + p}$$



Por otra parte, dado que el mínimo de voltaje corresponde a una diferencia de voltajes y el máximo a una suma, se comprende que la relación de voltajes será

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Esta relación de voltajes es, técnicamente, de muy fácil determinación y con ella se pasa a $Z_{x \min}$ que sirve de base para lo que sigue. El cálculo numérico se aligera apreciablemente, cuando se considera la impedancia aparente Z como la de una línea con pérdidas cortocircuitada al final. Entonces se aplica:

$$\frac{Z}{Z_0} = \text{Tgh } (a + jb)$$

Donde $g = a + jb$ es la función propagación de esta imaginaria línea de transmisión, que debe tener, naturalmente, la impedancia característica Z_0 . Para la línea de conexión antes dicha, con la misma impedancia característica Z_0 y para el trozo de alambre de Lecher hasta el mínimo, se pueden sumar las funciones propagación. Para todo el trozo desde $x_{\min}$ hasta el final, se puede poner:

$$\frac{Z_{x \min}}{Z_0} = \text{Tgh } (a + jb + a' + jb' + jb'')$$

Donde $a' + jb'$ es la función propagación de la línea de conexión y jb'' la función propagación del trozo de alambres de Lecher hasta el mínimo, ya que se los puede considerar sin pérdidas. En el mínimo de voltaje se puede aplicar simplemente la ley de Ohm. Este hecho facilita el cálculo de las funciones propagación.

$$(3) \quad m_1 = \text{Tgh } (a' + jb' + jb'') = 0,15$$

$$(4) \quad m_2 = \text{Tgh } (a + jb + a' + jb' + jb'') = 0,70$$

Para abreviar la escritura, pondremos:

$$a' + jb' + jb'' = g_1 \quad b_2'' - b_1'' = \delta$$

Con estos símbolos, las igualdades anteriores se convierten en

$$(3') \quad m_1 = \text{Tgh } g_1 = 0,15$$

$$(4') \quad m_2 = \text{Tgh } (g + a + jb + j\delta) = 0,70$$

el valor de g_1 puede leerse como número real en la escala Th de la regla de cálculo, poniendo el cursor en $m = 0,15$ de la escala D. $g_1 = 0,1512$

De manera parecida obtendremos

$$g_1 + a + jb + j\delta = 0,867$$

$$a + jb + j\delta = 0,867 - 0,1512 = 0,7158$$

De donde se deduce que $a = 0,716$ y $b = -\delta$. El valor de δ se obtiene del desplazamiento del punto mínimo de la primera a la segunda medición. La constante de propagación γ de una línea de transmisión sin pérdidas es un ángulo puro, ya que no existe atenuación. Por tanto $\gamma = j \cdot \beta$ a la función propagación para la distancia entre los dos mínimos será $j\delta = j\beta(l_2 - l_1)$. Y con la fórmula de aplicación general $\beta \cdot \lambda = 2\pi$, se obtiene:

$$j\delta = j \cdot 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda} = j 2\pi \frac{70 - 40}{300}$$

$$j\delta = j \cdot 2\pi \cdot 0,1$$

o en grados

$$j\delta = j 360^\circ \cdot 0,1 = j 36^\circ$$

Con esto se ha llegado ya a la expresión total $g_1 = a + jb = 0,716 - j 36^\circ$. Queda todavía para hallar el valor de Z a partir de la ecuación (1):

$$\frac{Z}{Z_0} = \text{Tgh } (a + jb) = \text{Tgh } (0,716 - j 36^\circ)$$

Para calcular esta expresión remitimos a la pag. 38.

$$\frac{Z}{Z_0} = \text{Tgh } (0,716 - j 36^\circ) = \frac{0,977/-49,8^\circ}{1,125/-24,05^\circ} = 0,868/-25,8^\circ$$

Con ello la impedancia aparente buscada será

$$Z = 60 \cdot 0,868/-25,8^\circ = 52,1/-25,8^\circ = (47 - j 22,6) \Omega$$