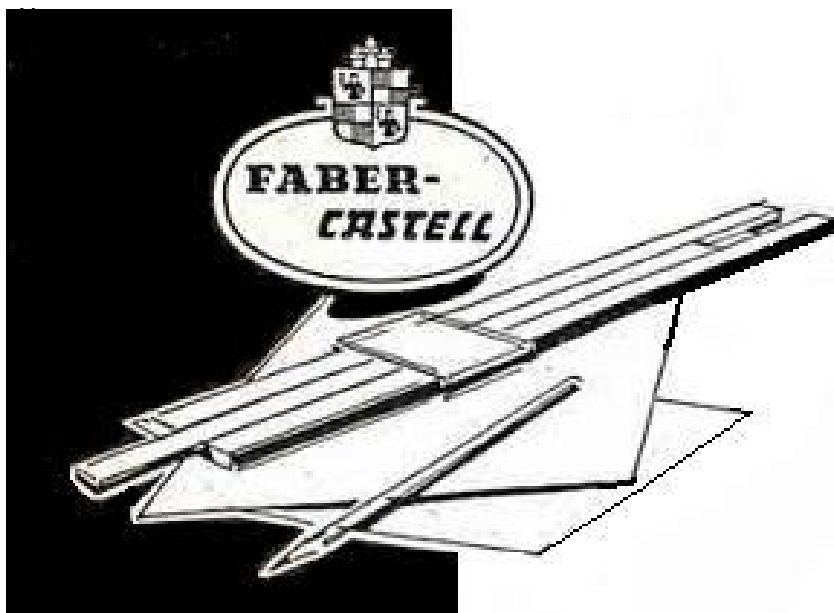




MATHEMA

CASTELL 2 / 84

NUOVE ISTRUZIONI RIVEDUTE ED AMPIATE
SULLA BASE DELLE ISTRUZIONI ORIGINALI DELL'ING. EUGEN MÖLLER

A CURA DELL'ING. ALESSANDRO MANNI

INDICE

Modalità convenzionali di impostazione adottate per gli esempi del testo	pag. 4
Storia del regolo calcolatore logaritmico	pag. 5
Teoria del regolo calcolatore	pag. 6
L'impostazione del regolo calcolatore Mathema	pag. 8
Precisione delle letture in un Regolo calcolatore	pag. 11
Le scale del regolo calcolatore Mathema	pag. 15
Le scale principali Y e y e la loro reciproca 1/y	pag. 15
Posizione del punto decimale	pag. 16
Moltiplicazioni e divisioni multiple	pag. 16
Aumento della precisione	pag. 17
Estrazione della radice quadrata	pag. 17
Frazioni reciproche	pag. 18
Le scale Paraboliche $\sqrt{X} \dots Y^2$, $\sqrt{x} \dots y^2$ e la loro reciproca $1/\sqrt{x} \dots 1/y^2$	pag. 19
Espressioni composte	pag. 19
Elevamento al cubo – n^3	pag. 21
Radice quadrata di numeri elevati al cubo – $n^{3/2}$	pag. 22
Radice cubica – $n^{1/3}$	pag. 23
Radice cubica di numeri elevati al quadrato – $n^{2/3}$	pag. 24
Quarte potenze – n^4	pag. 24
Radice quarta – $n^{1/4}$	pag. 25
Le scale Pitagoriche $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$ e $\sqrt{X^2-1} \dots \sqrt{1+Y^2}$	pag. 25
Le scale Trigonometriche e Arco-Trigonometriche $\sin X^g \dots {}^g\sin Y$ e $\tan X^g \dots {}^g\tan Y$	pag. 27
Scale esponenziali e logaritmiche	pag. 32

Le funzioni esponenziali di base e^{x^g} , e^x e le funzioni logaritmiche inverse $\ln Y^g$, $\ln Y$	pag. 32
La scala $(e^{x^g}) \dots ({}^g \ln Y)$ per calcoli iperbolici	pag. 33
La scala $(e^x) \dots (\ln Y)$ per esponenziali qualsiasi	pag. 35
Le funzioni logaritmiche di base $\pm \ln X$ e le funzioni esponenziali inverse $e^{\pm y}$	pag. 37
Le funzioni iperboliche e le loro inverse	pag. 40
Le scale $\sinh x^g \dots {}^g \sinh y$ e $0.1 \sinh x^g \dots {}^g \sinh 10y$	pag. 41
La scala $0.1 \cosh x^g \dots {}^g \cosh 10y$	pag. 41
La scala $\tanh x^g \dots {}^g \tanh y$	pag. 41
Calcoli trigonometrici in gradi sessagesimali (360°)	pag. 43
Applicazioni particolari	pag. 44
Interpolazione lineare	pag. 44
Interpolazione quadratica	pag. 45
Radici reali dell'equazione di secondo grado $x^2 + ax + b = 0$	pag. 50
Soluzione goniometrica di equazioni quadratiche	pag. 51
Radici dell'equazione cubica ridotta $x^3 + ax + b = 0$	pag. 52
Algoritmo di Horner	pag. 55
Formulario	pag. 59
Coefficienti binomiali, fattoriali e numeri di Bernoulli B_n	pag. 59
Funzioni trigonometriche, iperboliche e loro inverse	pag. 59
Relazioni fra funzioni iperboliche / trigonometriche con argomento singolo, doppio o dimezzato	pag. 60
Serie di potenze delle funzioni elementari del Regolo Calcolatore Mathema	pag. 61
Derivate $f'(x)$ e Integrali Indefiniti $\int f(x)dx$ delle funzioni elementari del Regolo Calcolatore Mathema	pag. 62

Modalità convenzionali di impostazione adottate per gli esempi del testo

Le modalità di impostazione (indicate in rosso) per gli esempi riportati nel presente manuale, sono rappresentate adottando le seguenti convenzioni:

- le scale sono indicate scrivendo la funzione $f(x)$ che le denota tra parentesi quadre $[]$, alle quali segue il valore di impostazione o di lettura: ad es. $[e^{xg}] 35^g$ significa impostare o leggere 35^g sulla scala (e^{xg});
- il simbolo $\boxed{}$ rappresenta la linea di fede del cursore;
- la barra semplice $/$ indica la giustapposizione di una lettura su una scala dello statore (a destra della barra) con la lettura su una scala dello scorrevole (a sinistra della barra): ad es. $[Y] .24 / [y] .8$ significa spostare lo scorrevole in modo che il valore .8 della scala y sia in corrispondenza del valore .24 della scala Y . La barra semplice $/$ indica anche la giustapposizione fra linea di fede del cursore e lettura su una qualsiasi scala. Vale la convenzione generale in base alla quale ciò che è indicato a destra della barra si sposta su ciò che è indicato a sinistra: ad es. $\boxed{} / [y] .8$ significa spostare lo scorrevole in modo che il valore .8 della scala y venga a trovarsi sotto la linea di fede del cursore; $[y] .8 / \boxed{}$ significa invece che è il cursore che viene spostato in modo che la linea di fede si trovi in corrispondenza del valore .8 della scala y ;
- il simbolo $\curvearrowright$ indica il ribaltamento del regolo, necessario per giustapporre letture fra scale poste sul recto (ad es. la scala $[Y]$) e sul verso del regolo (ad es. la scala $[-\ln X]$);
- Il punto e virgola $;$ separa due diverse impostazioni;
- La freccia $\rightarrow$ indica la lettura di un risultato sulla scala riportata alla sua destra: ad es. $\boxed{} \rightarrow [Y] .45$ significa che in corrispondenza della linea di fede del cursore si legge il risultato .45 sulla scala Y ; $[y] .3 \rightarrow [Y] .45$ significa che in corrispondenza del valore .3 sulla scala y , si legge il risultato .8 sulla scala Y .
- Le lettere **P.B.** indicano la posizione base del regolo (zero), cioè quella in corrispondenza della quale le scale principali coincidono;
- $M^k_{(10z)}$ indica l'indice del cursore da utilizzare (in alto o in basso) per i calcoli esponenziali e logaritmici e il moltiplicatore ad esso associato riportato sul bordo del cursore stesso: ad es. $[M^{560}_{(10^5)}]$ indica il sesto indice in alto da sinistra del cursore, che corrisponde a letture sulla scala Y da moltiplicare per il fattore 10^5 ; $[M^{6.6}_{(10^4)}]$ indica il quinto indice in basso da sinistra del cursore, che corrisponde a letture sulla scala Y da moltiplicare per il fattore 10^4 ;
- $M2\pi\uparrow$, $M\pi/4\uparrow$, $M4\pi\uparrow$, $M\pi/2\uparrow$, $M2\pi\downarrow$, $M\pi/4\downarrow$, $M4\pi\downarrow$, $M\pi/2\downarrow$, indicano l'indice del cursore da utilizzare e la sua posizione (in alto o in basso, a seconda che si utilizzino scale della parte inferiore o superiore dello statore) per i calcoli con radianti e per le conversioni metriche;

Si adottano inoltre le seguenti simbologie:

per gli angoli: g = grado centesimale;

rad = radianti;

per i logaritmi: log = logaritmo in base 10;

$\log_a$ = logaritmo in base "a";

ln = logaritmo naturale (in base "e").

Storia del Regolo calcolatore logaritmico

Il regolo logaritmico si basa sulla formulazione della teoria dei logaritmi enunciata da Jost Bürgi (1607) e Lord John Napier (1614).

Nel 1624 Edmund Gunter, professore di astronomia al Gresham College di Londra, sviluppa una scala logaritmica sulla quale, con l'aiuto di un compasso, si possono eseguire graficamente moltiplicazioni e divisioni. Giustapponendo due di queste scale su altrettanti regoli, nel 1627 Edmund Wingate esegue direttamente moltiplicazioni e divisioni senza dover usare il compasso. Nel 1632, William Oughtred, indipendentemente da Wingate, traccia due scale di Gunter su cerchi concentrici: è questo, a tutti gli effetti, il primo regolo circolare. Ulteriori sviluppi si devono a Seth Partridge, che nel 1657 inserisce un cursore fra i due regoli scorrevoli, e a Mark Roget, che nel 1815 introduce le scale bi-logaritmiche;

Nel 1851, Amédée Mannheim, professore di matematica e capitano di artiglieria dell'esercito francese, ordina le diverse scale del regolo in un modo che verrà ripreso da buona parte dei produttori. Il regolo Mannheim porta le scale numeriche principali sul fronte di statore e scorrevole, mentre dispone la scala del seno e quella della tangente sul retro dello scorrevole. Per leggere le scale trigonometriche si deve quindi estrarre lo scorrevole e reintrodurlo girato sullo statore. Viene spesso attribuito a Mannheim anche un altro semplice, ma fondamentale contributo: l'introduzione del cursore mobile, così come lo conosciamo oggi, che rende più semplice e precisa la lettura dello strumento, anche se la prima idea di cursore si deve, come si è visto, a Partridge.

Nel 1902 l'ingegnere tedesco Max Rietz aggiunge la scala dei cubi e quella dei logaritmi decimali al regolo di Mannheim, disponendole sul fronte dello statore. Due linee di riferimento sul retro del corpo permettono inoltre di leggere le scale trigonometriche senza dover girare lo scorrevole. Questo modello di regolo rimarrà il più diffuso fino alla comparsa delle calcolatrici scientifiche.

Nel 1934, all'università di Darmstadt, il professor Alwin Walther apporta nuove migliorie al regolo di Rietz: introduce la scala pitagorica, sposta la scala dei logaritmi sul fianco posteriore e quelle trigonometriche sul fianco anteriore dello statore. Il retro dello scorrevole rimane così libero per tre scale esponenziali, utili per effettuare radici e potenze d'ordine qualsiasi, come pure calcolare logaritmi in base qualsiasi. Naturale evoluzione del regolo Rietz è il cosiddetto regolo Duplex, che presenta scale graduate su entrambe le facce dello statore e dello scorrevole.

Teoria del Regolo calcolatore

La caratteristica peculiare di un regolo calcolatore logaritmico è quella di trasformare addizioni e sottrazioni fra segmenti del regolo (che possono essere effettuate meccanicamente) in processi di calcolo d'ordine superiore (quali moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici etc.), sfruttando il fatto che le sezioni del regolo riportano graduazioni in scala logaritmica. Ciò significa che la porzione di scala corrispondente ad un determinato numero non è proporzionale al numero stesso, come accade in un normale metro, ma al suo logaritmo.

E' noto che, per i logaritmi, valgono le seguenti relazioni:

$$\log a + \log b = \log (a \times b)$$

$$\log a - \log b = \log (a \div b)$$

Se la graduazione di due scale contrapposte è tracciata in proporzione logaritmica, allora sommando o sottraendo fra loro porzioni di scala, quello che noi facciamo in realtà è **moltiplicare** o **dividere** numeri naturali.

Tanto il punto iniziale, quanto il punto finale di una scala logaritmica semplice corrispondono sempre al numero 1, poiché 1 è un fattore che non ha influenza sugli altri numeri, dal momento che $\log(1) = 0$ in qualsiasi base.

Le scale tracciate in base al logaritmo dei numeri naturali costituiscono le scale principali del regolo calcolatore, alle quali sono riferite tutte le altre scale.

Osservando che

$$n \log a = \log (a^n)$$

è facile capire che, a parità di lunghezza complessiva delle scale, contrapponendo ad una scala principale una scala con due sezioni decimali, queste saranno lunghe ognuna la metà di quella della scala principale e, conseguentemente, su di essa troveremo i quadrati dei numeri ad essa contrapposti sulla scala principale. Analogamente, se ad una scala principale si contrappone una scala di pari lunghezza ma suddivisa in tre sezioni decimali, queste saranno lunghe ognuna un terzo di quella della scala principale e, conseguentemente, su di essa troveremo i cubi dei numeri ad essa contrapposti sulla scala principale. Queste scale sono dette, rispettivamente, parabolica e cubica. E' evidente che, se impostando un numero n sulla scala principale su di esse leggiamo rispettivamente n^2 e n^3 , impostando un numero n sulla scala parabolica, leggeremo la sua radice quadrata sulla scala principale e, analogamente, impostando un numero n sulla scala cubica, leggeremo la sua radice cubica sulla scala principale.

Le scale paraboliche costituiscono una presenza costante in ogni regolo, mentre la scala cubica non sempre è presente, dal momento che la limitata lunghezza delle sue sezioni decimali comporta una modesta precisione nelle letture che da essa è possibile effettuare. Ed è proprio per questo motivo che il calcolo di potenze d'ordine superiore al terzo vengono sistematicamente demandate alle scale bi-logaritmiche.

In linea generale, infatti, **potenze** e **radici** dei numeri naturali si ottengono utilizzando due scale: una scala principale e una scala bi-logaritmica dei numeri naturali. Una scala bilogaritmica presenta le graduazioni tracciate in base al logaritmo del logaritmo dei numeri ad esse corrispondenti, quindi sommare o sottrarre fra di loro segmenti di una scala principale e segmenti di una scala bilogaritmica significa effettuare queste operazioni:

$$\log (\log a) + \log n = \log (n \times \log a) = \log (\log a^n),$$

$$\log (\log a) - \log n = \log (1/n \times \log a) = \log (\log a^{1/n})$$

cioè calcolare potenze e radici d'ordine qualsiasi.

Il punto iniziale ed il punto finale di una scala bi-logaritmica corrispondono alla base del logaritmo, poiché il logaritmo della base è = 1 che, come visto, non influenza gli altri numeri, poiché $\log (1) = 0$ in qualsiasi base. Le scale bilogaritmiche di un regolo calcolatore sono le scale LL - e^x .

Con l'operazione inversa dell'elevamento a potenza si ottiene:

$$\log (\log a^n) - \log (\log a) = \log (\log a^n \div \log a) = \log n$$

$$\log (\log a^{\frac{1}{n}}) - \log (\log a) = \log \left(\frac{\log a^{\frac{1}{n}}}{\log a} \right) = \log \left(\frac{1}{n} \right)$$

Ma gli esponenti "n" e "1/n" possono essere visti anche come logaritmi in base a, rispettivamente, degli antilogaritmi a^n e $a^{1/n}$ e questo dimostra come le scale bi-logaritmiche possano essere utilizzate anche per estrarre logaritmi in base qualsiasi.

Inoltre, per aumentare il campo di impiego del regolo in matematica, fisica e ingegneria, a seconda del suo specifico campo di impiego su ogni regolo sono presenti, oltre alle funzioni elementari, anche altre scale logaritmiche suddivise in modo da rappresentare funzioni visualizzate in relazione alle scale principali. Con le scale di funzioni $f(X)$ e $f(x)$, quali ad esempio le scale trigonometriche e le scale pitagoriche, è possibile, proiettandole sulle scale principali o bi-logaritmiche, effettuare tutte le operazioni di matematica superiore che derivano dalle seguenti relazioni:

$$\log f(X) + \log f(x) = \log (f(X) \times f(x))$$

$$\log f(X) - \log f(x) = \log (f(X) \div f(x))$$

$$\log (\log f(X)) + \log f(x) = \log (\log f(X)^{f(x)})$$

$$\log (\log f(X)) - \log f(x) = \log (\log f(X)^{\frac{1}{f(x)}})$$

Quando trasferiamo un dato dalla scala $f(X)$ alla scala $f(y)$, $f(X)$ si collega al fattore contrapposto all'indice $Y = 1$ della scala principale. Analogamente quando il trasferimento avviene dalla scala $f(x)$ alla scala $f(Y)$. Il fattore di $f(x)$ appare sulla scala Y opposto a $y = 1$.

Il fatto che qualsiasi scala di un regolo sia di tipo logaritmico, non ha riflessi sulla denominazione delle scale, né sulle cifre che compaiono su di esse: sugli indici della scala sono infatti riportati i soli valori dei corrispondenti antilogaritmi, ed è proprio questo che consente di trasformare in moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici etc. quelle che, in realtà, non sono altro che somme o sottrazioni di segmenti logaritmici.

L'impostazione del regolo calcolatore Mathema

Il regolo Faber Mathema presenta caratteristiche tipiche sia del regolo Rietz, che del regolo Duplex, e si distingue per originalità, completezza e versatilità. Esso è destinato alle applicazioni numeriche in matematica pura, come pure alla trattazione matematica delle scienze naturali. A tal riguardo, esso è stato dotato di scale per tutte le funzioni di base, con un livello di completezza tale da consentire l'effettuazione di calcoli nella maniera più diretta e precisa possibile.

L'uso del Regolo Calcolatore Mathema è reso semplice grazie all'ubicazione sul recto dello statore delle scale di più frequente utilizzo, all'adozione di una comune unità di misura per gli argomenti delle funzioni circolari e iperboliche, alla definizione - in conformità alle normali consuetudini - delle funzioni primarie e delle loro inverse. La particolare estensione delle scale e la presenza di numerosi indici specifici sul cursore rendono inoltre il calcolo particolarmente preciso.

La scala principale sullo statore, alla quale sono legate tutte le altre scale, è designata come **Y**.

La scala principale sullo scorrevole, alla quale sono legate tutte le altre scale, è designata come **y**.

Le funzioni rappresentate dalle restanti scale sono designate con lettere maiuscole o minuscole a seconda che siano riferite rispettivamente alla scala principale Y dello statore o alla scala principale y dello scorrevole.

Poiché il rapporto fra scala funzionale e scala principale Y è sempre biunivoco, un valore X su di una scala funzionale può essere il valore di **impostazione** che genera il risultato f(X) sulla scala principale, ma può anche essere visto come il **risultato** f(Y) di un valore di impostazione Y sulla scala principale. Per ricordare sempre questa impostazione, le varie scale funzionali riportano alla loro destra il risultato che su di esse è possibile leggere in funzione di impostazioni effettuate sulle scale principali Y e y, mentre alla loro sinistra riportano il valore della lettura che, in funzione di impostazioni effettuate su di esse, è possibile effettuare sulle scale principali Y o y.

Ad esempio, impostando l'ampiezza X^g di un angolo sulla scala che alla sua sinistra riporta l'indicazione $\sin X^g$, sulla scala Y leggeremo il corrispondente valore di $\sin X$; se invece impostiamo un valore $Y = \sin X^g$ sulla scala principale Y, sulla medesima scala funzionale leggeremo il valore di $\arcsin X^g$, come ci aiuta a ricordare l'etichetta di destra, che appunto riporta l'indicazione $^g\sin Y$.

Analogamente, impostando un valore X sulla scala che alla sua sinistra riporta l'indicazione (e^X) , sulla scala Y leggeremo il corrispondente valore e^X ; se invece impostiamo un valore Y sulla scala principale Y, sulla medesima scala funzionale leggeremo il corrispondente valore $\ln Y$, come anche in questo caso ci aiuta a ricordare l'etichetta di destra, che appunto riporta l'indicazione $(\ln Y)$.

Così, se ad esempio **imposteremo** 0.2 sulla scala Y o sulla scala y, leggeremo :

$12.57 = \arctg 0.2$	sulla scala indicata con $^g\tan Y$ alla sua destra.
$1.0198 = \sqrt{1 + 0.2^2}$	sulla scala indicata con $\sqrt{1 + Y^2}$ alla sua destra
$0.04 = 0.2^2$	sulla scala indicata con Y^2 (ovvero y^2) alla sua destra

25	sulla scala indicata con $1/y^2$ alla sua destra
5	sulla scala indicata con $1/y$ alla sua destra
$0.9798 = \sqrt{1 - 0.2^2}$	sulla scala indicata con $\sqrt{1 - Y^2}$ alla sua destra
$12.82 = \arcsin 0.2$	sulla scala indicata con $\sin Y$ alla sua destra
$7.39 = e^{2 \text{ (=10 x 0.2)}}$	sulla scala indicata con e^{10Y} alla sua destra posta sul retro dello statore
$0.8185 = e^{-0.2}$	sulla scala indicata con e^{-Y} alla sua destra posta sul regolo dello statore e così via per tutte le restanti scale del regolo.

Viceversa, se invece **leggeremo** 0.2 sulla scala Y o sulla scala y, tale risultato sarà da interpretarsi come:

$0.2 = \tan 12.57^\circ$,	con 12.57 impostato sulla scala indicata con $\tan X^\circ$ alla sua sinistra
$0.2 = \sqrt{1.0198^2 - 1}$,	con 1.0198 impostato sulla scala indicata con $\sqrt{X^2 - 1}$ alla sua sinistra
$0.2 = \sqrt{0.4}$,	con .4 impostato sulla scala indicata con $\sqrt{X}$ (ovvero $\sqrt{x}$) alla sua sinistra
$0.2 = 1/\sqrt{25}$,	con 25 impostato sulla scala indicata con $1/\sqrt{x}$ alla sua sinistra
$0.2 = 1/5$,	con 5 impostato sulla scala indicata con $1/y$ alla sua sinistra
$0.2 = \sqrt{1 - 0.9798^2}$,	con 0.9798 impostato sulla scala indicata con $\sqrt{1 - X^2}$ alla sua sinistra
$0.2 = \sin 12.82^\circ$,	con 12.82 impostato sulla scala indicata con $\sin X^\circ$ alla sua sinistra
$0.2 = 0.1 \cdot \ln 7.39^{(1)}$,	con 7.39 impostato sulla scala indicata con $0.1 \ln X$ alla sua sinistra
$0.2 = -10 \cdot \ln 0.9802^{(2)}$,	con 0.9802 impostato sulla scala indicata con $-10 \ln X$ alla sua sinistra e così via per tutte le restanti scale del regolo.

Per consentire la rappresentazione delle funzioni negli intervalli d'uso pratico, **alcune scale sono rappresentate in più sezioni**: così le scale paraboliche Y^2 e y^2 presentano due sezioni decimali, le scale logaritmiche ed esponenziali sul retro dello statore sono rappresentate su tre livelli, mentre due sono i livelli di rappresentazione della scala del seno iperbolico sul retro dello scorrevole.

Per molte funzioni, inoltre, la graduazione si estende oltre il normale ambito decimale delle scale principali, così da evitare, in molti casi, il cambio di posizione dello scorrevole fra la posizione iniziale e quella finale.

Tutte le scale crescenti da sinistra a destra sono in nero. Le scale inverse, cioè quelle crescenti da destra a sinistra, sono **in rosso**.

L'unità comune utilizzata per gli angoli è il **grado centesimale** ($^\circ$). Essa vale tanto per gli argomenti delle funzioni circolari che per quelli delle funzioni iperboliche, perché esse sono correlate tra loro e spesso compaiono contemporaneamente in equazioni e formule varie.

Per una facile conversione dei gradi centesimali in misure circolari (radianti), il cursore è provvisto di indici corrispondenti ai fattori 2π , $\pi/4$, a sinistra della linea di fede centrale, 4π , $\pi/2$, a destra della linea di fede centrale, sia da utilizzarsi sulle scale Y, y e loro inversa (indici nella parte inferiore del cursore), sia sulle scale paraboliche Y^2 , y^2 e loro inversa (indici nella parte superiore del cursore).

¹ Quindi $\ln 7.39 = 2$

² Quindi $\ln 0.9802 = -0.02$

Per mezzo dell'indice $\pi/2$ del cursore è possibile convertire immediatamente le misure circolari di angoli da gradi metrici ⁹ a radianti e viceversa. Poiché infatti 100 ⁹ corrispondono a $\pi/2$ rad, è sufficiente collocare la linea di fede centrale sul valore in gradi centesimali sulle scale principali o paraboliche e leggere il corrispondente valore in radianti sulla medesima scale di impostazione, sotto la linea di fede marcata $\pi/2$ a destra della linea di fede centrale ⁽³⁾

Esempi:

$246^g = 3.86_{\text{rad}}$	$[Y] .246^g / [I] ; [M\pi/2\downarrow] \rightarrow [Y] .386_{\text{rad}}$
$3.12^g = 0.049_{\text{rad}}$	$[Y] .312^g / [I] ; [M\pi/2\downarrow] \rightarrow [Y] .49_{\text{rad}}$
$6.00_{\text{rad}} = 382^g$	$[Y] .6_{\text{rad}} / [M\pi/2\downarrow] ; [I] \rightarrow [Y] .382^g$

Gli stessi esempi possono essere calcolati in modo identico con la scala parabolica Y^2 utilizzando, in questo caso, le linee del cursore riferite agli indici superiori; i risultati saranno ovviamente affetti da un minor grado di precisione, stante la lunghezza dimezzata delle scale decimali.

L'indice superiore $\pi/4$ del cursore, simmetrico all'indice superiore $\pi/2$ rispetto alla linea centrale = 1, rende possibile mettere in relazione diretta l'**area di un cerchio** sulla scala parabolica con il corrispondente **diametro** sulla scala principale Y.

Esempi:

$\emptyset 41 \rightarrow A = 1320$	$[Y] .41 / [I] ; [M\pi/4\downarrow] \rightarrow [Y^2] 0.132$
$A = 3.14 \rightarrow \emptyset 2$	$[Y^2] 0.0314 / [M\pi/4\uparrow] ; [I] \rightarrow [Y] .2$
$A = 31.4 \rightarrow \emptyset 6.32$	$[Y^2] .314 / [M\pi/4\uparrow] ; [I] \rightarrow [Y] .632$

Le **posizioni del punto decimale** indicate sulle scale principali e pitagoriche sono riferite unicamente alle scale trigonometriche e al mutuo rapporto fra scale principali e pitagoriche; non assumono invece significato alcuno nelle scale con espressioni di funzione tra parentesi.

Un punto decimale che **precede** una cifra va interpretato in relazione al primo indice unitario alla sua **sinistra** (es. .2 della scala Y^2 significa 0.02 se ha alla sua sinistra l'indice 0.01, significa 0.2 se ha alla sua sinistra l'indice 0.1).

Un punto decimale che **segue** una cifra va interpretato in relazione al primo indice unitario alla sua **destra** (es. 2. della scala $1/Y^2$ significa 20 se ha alla sua destra l'indice 10, significa 200 se ha alla sua destra l'indice 100).

Ad eccezione delle scale e^{xg} , e^x , $^g\ln Y$ e $\ln Y$, le scale sono divise in modo non uniforme. In particolare, gli intervalli tra le varie graduazioni hanno lunghezze diverse a seconda della loro posizione nella scala. Gli intervalli decimali non sono sempre divisi in 10 parti, ma in 5 o in 2 a seconda dei casi.

Le impostazioni vengono normalmente effettuate utilizzando la linea di fede centrale del cursore, ma operando alle estremità delle scale principali può essere vantaggioso utilizzare le linee di fede laterali; ciò a condizione che non si stiano utilizzando le scale e^{xg} , e^x , $^g\ln Y$ o $\ln Y$, che sono in relazione diretta con la linea di fede centrale. Le distanze tra le linee di fede principali e secondarie del cursore corrispondono ai multipli e sottomultipli di uso più frequente del fattore π . Analogamente per i tratti presenti sulla parte posteriore del cursore.

³ Per le letture sulle scale principali, tale linea corrisponde alla linea a tutta altezza all'estremità destra del cursore, per le scale paraboliche, invece, tale linea corrisponde alla seconda linea a destra della linea di fede principale.

Precisione delle letture in un Regolo calcolatore

Le funzioni compaiono sul regolo in forma **continua**. Ciò significa che sono **facilmente interpolabili**, sia pure entro i limiti di accuratezza insiti nella dimensione delle scale. Se L è la lunghezza del tratto di regolo che è utilizzato per rappresentare l'unità $\ln(e) = 1$ ⁽⁴⁾, allora la lunghezza z della sezione logaritmica del regolo in corrispondenza del valore y vale:

$$z = L \cdot \ln y$$

Se nell'impostazione o nella lettura di un valore commettiamo un errore di valutazione Δz , l'errore relativo $\frac{\Delta y}{y}$ che commettiamo sulla lettura del valore y sulla scala principale sarà espresso dalla derivata discreta della funzione $z = L \cdot \ln y$ rispetto alla variabile y :

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \Delta(L \cdot \ln y) = L \cdot \Delta(\ln y) = \frac{L}{y} \longrightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{L}$$

ed è quindi costante ed indipendente delle funzioni $f(x)$ che sono state trasferite alla scala y .

Se $\Delta z = \frac{L}{500}$ otteniamo nella scala principale un errore relativo $\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{500} = 0.2\%$.

Se vengono effettuate n moltiplicazioni e/o divisioni, l'errore apparente aumenterà $\sqrt{n}$ volte, secondo la legge gaussiana degli errori.

La lunghezza Z della sezione logaritmica della funzione $f(x)$, collegata alla scala principale è:

$$Z = L \cdot \ln f(x) \quad (5)$$

Se indichiamo con Δz l'errore di posizionamento e lettura, il relativo errore sulla scala della funzione $f(x)$ è:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta z \cdot f(x)}{L \cdot x \cdot f'(x)} \quad (6)$$

Possiamo allora calcolare l'errore di lettura $\frac{\Delta x}{x}$ per un errore di posizionamento $\Delta z = \frac{L}{500}$ (= 0.4 mm nel caso del Faber Mathema) commesso su una scala $f(x)$, per ognuna delle funzioni presenti sul regolo:

⁽⁴⁾ In pratica, la lunghezza del tratto di scala Y in corrispondenza del valore $e = 2.718$, cioè $D / \ln 10$, dove D è la lunghezza della scala nel tratto decimale fra 1 e 10. Nel caso del Faber Mathema, che ha scale lunghe 200 mm, $L = 86.8$ mm.

⁽⁵⁾ Esempio: $\sin 26^\circ = 0.397 \rightarrow Z = 86.8 \cdot \ln 3.97 = 119.7$ mm. Ricordiamoci sempre che la lunghezza delle sezioni logaritmiche della scala principale del regolo sono proporzionali alle mantisse dei numeri naturali.

⁽⁶⁾ $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \Delta(L \cdot \ln f(x)) = L \cdot \Delta(\ln f(x)) = L \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \longrightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta z \cdot f(x)}{x \cdot L \cdot f'(x)}$

- 1) per la funzione $f(x) = y = x$, $f'(x) = 1$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002 \cdot x}{x \cdot 1} = 2 \text{ ‰}$ per qualsiasi valore di y .
- 2) per la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = -2 \text{ ‰}$ per qualsiasi valore di y .
- 3) per la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002 \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x \cdot -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}} = -4 \text{ ‰}$ per qualsiasi valore di y .
- 4) per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = 4 \text{ ‰}$ per qualsiasi valore di y .
- 5) per la funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{1-x^2}{x^2} \cdot 0.002$.

il valore di x^2 che corrisponde a $f(x) = y = 0.1$ è 0.99, quindi: $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{0.1^2}{0.99} \cdot 0.002 = -0.02 \text{ ‰}$.

Il valore di x che corrisponde a $f(x) = y = 1$ è $x = 0$, quindi troveremo $\frac{\Delta x}{x} = -\infty$

- 7) per la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot 0.002$.

il valore di x^2 che corrisponde a $f(x) = y = 0.1$ è 1.01, quindi: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.1^2}{1.01} \cdot 0.002 = -0.02 \text{ ‰}$.

Il valore di x^2 che corrisponde a $f(x) = y = 1$ è $x = 2$, quindi troveremo $\frac{\Delta x}{x} = 1$

- 8) per la funzione $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} \cdot 0.002$.

Il valore di $\cos x$ corrispondente a $\sin x = 0.1$ si legge sulla scala $\sqrt{1 - Y^2}$ e vale 0.995, quindi:

per $y = 0.1$, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.1}{0.1 \cdot 0.995} \cdot 0.002 = 2.01\text{‰}$

per $\sin x = y = 1$, $\cos x = 0$, quindi, anche in questo caso, $\frac{\Delta x}{x} = \infty$

9) per la funzione $f(x) = \tan x$, $f'(x) = (1 + \tan^2 x)$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\tan x}{x \cdot (1 + \tan^2 x)} \cdot 0.002$.

$x = 0.1_{\text{rad}}$ per $\tan x = 0.1$ e $x = 0.785_{\text{rad}}$ per $\tan x = 1$;

$(1 + \tan^2 x) = 1.01$ per $\tan x = 0.1$ e 2 per $\tan x = 1$, allora:

per $y = 0.1$, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{1.01} = 1.98\text{‰}$ per $y = 1$, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{0.785 \cdot 2} = 1.27\text{‰}$

10) per la funzione $f(x) = \sinh x$, $f'(x) = \cosh x$, quindi l'espressione dell'errore relativo è la medesima di quella vista per $f(x) = \sin x$ e si procede in assoluta analogia, con l'unica differenza che, in questo caso, vale la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, quindi il valore di $\cosh x$ si può leggere sulla scala $\sqrt{1 + Y^2}$.

$x = 0.1_{\text{rad}}$ per $\sinh x = 0.1$; $x = 0.88_{\text{rad}}$ per $\sinh x = 1$; $x = 3_{\text{rad}}$ per $\sinh x = 10$

$\cosh x = 1.005$ per $\sinh x = 0.1$; $\cosh x = 1.414$ per $\sinh x = 1$; $\cosh x = 10.05$ per $\sinh x = 10$

allora: per $\sinh x = y = 0.1$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{1.005} = 1.99\text{‰}$

per $y = 1$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{0.88 \cdot 1.414} = 1.61\text{‰}$

per $y = 10$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{10 \cdot 0.002}{3 \cdot 10.05} = 0.66\text{‰}$

11) per la funzione $f(x) = \cosh x$, $f'(x) = \sinh x$, e si opera in analogia al caso precedente, con l'unica differenza che dovremo calcolarci direttamente il valore di $\sinh x = \sqrt{1 - \cosh^2 x}$:

per $\cosh x = y = 1$, $\sinh x = 0$, quindi, per $y = 1$ $\frac{\Delta x}{x} = \infty$

$x = 2.99_{\text{rad}}$ e $\sinh x = 9.95$ per $\cosh x = 10$, quindi per $y = 10$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{10 \cdot 0.002}{2.99 \cdot 9.95} = 0.67\text{‰}$

12) per la funzione $f(x) = \tanh x$, $f'(x) = (1 - \tanh^2 x)$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\tanh x}{x \cdot (1 - \tanh^2 x)} \cdot 0.002$.

per $\tanh x = 0.1$, $x = 0.1_{\text{rad}}$ e $(1 - \tanh^2 x) = 0.99$, allora per $y = 0.1$, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{0.99} = 2.02\text{‰}$;

per $\tanh x = y = 1$, il denominatore si annulla, quindi , per $y = 1$ $\frac{\Delta x}{x} = \infty$

13) per la funzione $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, quindi $\frac{\Delta x}{x} = \ln x \cdot 0.002 = y \cdot 2 \text{‰}$

I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

--

LE SCALE DEL REGOLO CALCOLATORE MATHEMA

Le scale principali Y e y e la loro reciproca 1/y

Le sezioni corrispondenti all'intervallo da 0.1 a 1 e da 1 a 10, in scala logaritmica in base 10 sono esattamente equivalenti, perché al variare dell'ordine di grandezza della medesima cifra, il suo logaritmo si modifica solamente per la cifra che rappresenta la potenza di 10, detta "caratteristica", mentre la parte decimale, o "mantissa" resta invariata, (es. $\log. 4.6 = 0.66$; $\log. 460 = 2.66$).

Un intervallo decimale nelle scale principali **Y** e **y** consente pertanto di rappresentare tutti i numeri possibili, se si fa astrazione dalla posizione della virgola decimale. Ciò comporta che ogni indice di una potenza intera di dieci rappresenta sia il tratto iniziale che quello finale della scala principale. E' quindi sufficiente posizionare convenientemente lo scorrevole rispetto a tali indici, perché qualsiasi risultato cada sempre all'interno del dominio delle scale del regolo.

La scala 1/y è una scala regressiva, in accordo con la relazione $\ln 1/y = -\ln y$. Con questa scala è possibile convertire una **moltiplicazione** ($a \cdot b$) in una divisione ($a \cdot 1/b$) e viceversa. Le relazioni fra le scale principali **Y** da un lato e **y** e **1/y** dall'altro, sono di moltiplicazione e divisione.

Di norma, i calcoli semplici iniziano **spostando il cursore**, in modo che quando lo scorrevole è stato spostato il risultato sia posizionato **sull'intervallo decimale principale**, così che in caso di più espressioni sia possibile continuare il calcolo immediatamente.

Nel caso di calcoli tabellari, è buona norma posizionare una estremità del regolo sul termine costante nella scala **Y**, così che sia possibile tanto moltiplicare per fattori variabili per mezzo della scala **y**, quanto dividere per mezzo della scala **1/y**.

Il posizionamento dei numeri nelle scale principali, che può essere effettuato con l'ausilio delle linee di fede del cursore o, nel caso delle scale **Y** e **y** usando l'origine dell'altra scala, prescinde dalla posizione del punto decimale nella sequenza di cifre.

Nel caso di numeri come 1234, la quarta cifra potrà soltanto essere stimata. Nel caso di numeri come 8765 è quasi impossibile valutare la quarta cifra.

Una **divisione** come $2468 / 8.765 = 281.6$ si risolve collocando la linea di fede del cursore su **Y = 2468** e ivi sovrapponendo **y = 8765** dello scorrevole. Il risultato si leggerà nella scala **Y**, in opposizione all'origine della scala **y**:

[Y] .2468 / [y] .8765 ; [y] 1 → [Y] .2816

Una **moltiplicazione** come $234 \times 567 = 1327 \times 10^2$ si risolve collocando la linea di fede del cursore su **Y = 234** e ivi sovrapponendo **1/y = 567** dello scorrevole. Il risultato si leggerà sulla scala **Y**, in opposizione all'origine dello scorrevole:

[Y] .234 / [1/y] 5.67 ; [y] 0.1 → [Y] .1327

la medesima moltiplicazione può anche essere impostata come segue:

[Y] .234 / [y] 0.1 ; [y] .567 → [Y] 1.327 utilizzando il prolungamento verso destra della scala Y

[Y] .234 / [y] 1 ; [y] .567 → [Y] .1327 utilizzando il prolungamento verso destra della scala Y

Le ultime cifre significative di quozienti o prodotti semplici possono essere valutate col ragionamento. E' infatti abituale effettuare stime delle letture sulle scale.

Esempio: $605 / 4 = 151.25$ $202 \times 3 = 606$

La **posizione del punto decimale** si determinerà per mezzo di un calcolo mentale approssimato o, nel caso in cui ciò non sia agevole, scomponendo i fattori in potenze di dieci.

Esempio: $\frac{246800}{0.008765} \left[\approx \frac{3 \times 10^5}{1 \times 10^{-2}} \approx 3 \times 10^7 \right] = 2.816 \times 10^7$

Moltiplicazioni e divisioni multiple: Alternando l'uso del cursore e dello scorrevole è possibile effettuare più moltiplicazioni e divisioni in successione continua. In questo caso, non è necessario leggere tutti i risultati intermedi o riposizionare volta per volta l'origine dello scorrevole. Se, per esempio, i numeri sono tutti fattori di una moltiplicazione, allora si utilizzeranno alternativamente le scale 1/y e y, in congiunzione con la scala Y. In questo modo, la moltiplicazione $a \cdot b \cdot c \cdot d$ si converte in $a \div 1/b \cdot c \div 1/d$

Esempio: $12 \times 34 \times 56 \times 78 = 178 \times 10^4$ $[Y] .12 / [y] 0.1 ; [y] .34 / \square / [1/y] 5.6 ; [y] 0.1 / \square / [1/y] 7.8 ; [y] 0.1 \rightarrow [Y] .178$ oppure
 $[Y] .12 / [1/y] 3.4 ; [y] .56 / \square / [1/y] 7.8 ; [y] 0.1 \rightarrow [Y] .178$

Analogamente nel caso di espressioni del tipo $\frac{a}{bcd}$.

Esempio: $\frac{178}{12 \times 34 \times 56} = 0.0078$ $[Y] .178 / [y] .12 ; [y] 0.1 / \square / [y] .34 ; [y] 1 / \square / [y] .56 ; [y] 1 \rightarrow [Y] .78$ oppure
 $[Y] .178 / [y] .12 ; [1/y] 3.4 / \square / [y] .56 ; [y] 1 \rightarrow [Y] .78$

Il diagramma che segue esemplifica come si possono calcolare le possibili combinazioni dei valori a, b, c

$\frac{1}{y}$				c	b		b	c	$\frac{1}{y}$
y	b	c	b			c			y
Y	a	$\frac{ac}{b}$	a	$\frac{a}{bc}$	a	abc	a	$\frac{ab}{c}$	Y

Aumento della precisione: Se uno dei due fattori di un prodotto è prossimo a 1 ed è noto con un elevato grado di precisione (come ad esempio i risultati letti sulla scala circolare $\sqrt{1-Y^2}$ o sulla scala iperbolica $\sqrt{1+Y^2}$ del Regolo Mathema, è possibile ottenere un maggior grado di accuratezza decomponendolo nel valore 1 e nella deviazione da esso. Analogamente, se il rapporto di due termini noti è prossimo a 1:

Esempi: $0.9876 \times 543 = (1 - 0.0124) \times 543 = 543 - 6.73 = 536.27$ ⁽⁷⁾

$$\frac{456}{455} = 1 + \frac{1}{455} = 1.0022$$
 ⁽⁸⁾

L'estrazione della **radice quadrata** di un numero c sarà effettuata con maggiore precisione se si opererà nella forma:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 \pm R} = a \pm x$$

x può essere determinato usando il regolo calcolatore con la seguente relazione: $\frac{R}{2a \pm x} = x$

Esempio: $\sqrt{12.32} = \sqrt{9 + 3.32} = 3.51$ Per trovare il valore di x si opera per tentativi come segue:

[Y] .332 / [y] .6 ; [y] 1 → [Y] 0.553 ; [Y] .332 / [y] .6553 / [y] 1 → [Y] .507 ; [Y] .332 / [y] .651 ; [y] 1 → [Y] .51 → $\sqrt{12.32} = 3.51$

Al crescere del radicando n, il metodo si presta sempre meno alla precisione del regolo, ma è altrettanto vero che, al crescere di n, se approssimiamo semplicemente

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \pm R} = a \pm \frac{R}{2a}$$

l'errore che si commette è trascurabile.

Per minimizzare questo errore, conviene sempre scegliere il valore di a che minimizza il valore di R.

Esempio: $\sqrt{3.6} = \sqrt{1 + 2.6} = 1 + \frac{2.6}{2 \cdot 1} = 2.3$ con un errore del 21% sul risultato esatto;

$$\sqrt{3.6} = \sqrt{4 - 0.4} = 2 - \frac{0.4}{2 \cdot 2} = 1.9 \text{ che praticamente coincide col risultato esatto (1.897367...)}$$

⁷ Calcolando nel modo consueto si otterrebbe solamente 536.

⁸ Calcolando nel modo consueto si otterrebbe solamente 1.002.

Così operando, il massimo errore ε che si commette è comunque contenuto entro il 6% e già per $n > 20$ esso è comunque contenuto al disotto del 6 ‰, per scendere sotto l'1 ‰ per $n > 100$.

Esempi:	$\sqrt{112} = 10.583 = \sqrt{121 - 9} \approx 11 - \frac{9}{22} = 10.59$	con un errore dello 0.7 ‰
	$\sqrt{165} = 12.845 = \sqrt{169 - 4} \approx 13 - \frac{4}{26} = 12.846$	con un errore dello 0.08 ‰
	$\sqrt{201} = 14.177 = \sqrt{196 + 5} \approx 14 + \frac{5}{28} = 14.1786$	con un errore dello 0.1 ‰

Frazioni reciproche: Impostando una delle origini di [y] su un qualsiasi valore n di [Y], in corrispondenza dell'origine opposta di [Y] leggeremo su [y] il valore 1/n. E' così possibile calcolare in maniera immediata la frazione reciproca (cioè con numeratore e denominatore scambiati) di una frazione data: ciò è molto utile per giungere a risultati diretti quando una funzione primaria che viene letta su [Y], figura al denominatore di una frazione.

Esempio: $\frac{640}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sin 30^\circ}{640}} = 1410$

Senza dover leggere $\sin 30^\circ = 0.454$, il risultato è letto su [y] in corrispondenza dell'origine di [Y], ponendo la linea di fede del cursore sul valore $\sin 30^\circ$ e collocando sotto di essa il valore 678 della scala **y**.⁽⁹⁾

⁹ In pratica, impostare il regolo come indicato equivale ad impostare la divisione $\sin 30^\circ / 678$ (il cui risultato si legge sulla scala **Y** in corrispondenza dell'origine della scala **y**). Il reciproco di questo rapporto, cioè il risultato dell'operazione cercata, sarà allora leggibile sulla scala **y** in corrispondenza dell'origine della scala **Y**. [sin X°] 30° / [y] .64 ; [Y] 0.1 → [y] .141

Le scale Paraboliche $\sqrt{X} \dots Y^2$, $\sqrt{x} \dots y^2$ e la loro reciproca $\frac{1}{\sqrt{x}} \dots \frac{1}{y^2}$

Poiché $\ln \sqrt{x} = \frac{\ln x}{2}$, queste scale hanno suddivisioni larghe la metà di quelle delle scale principali.

Ciò significa che è possibile moltiplicare e dividere con esse nel medesimo modo con il quale si opera con le scale principali e relative reciproche, e che ciò può essere fatto senza la necessità di trasporre lo scorrevole, cosa che risulta molto comoda, ad esempio, nelle **interpolazioni lineari** o nelle tabellazioni. Tuttavia, usando queste scale si raddoppia l'errore dovuto all'imprecisione.

Due intervalli decimali di una scala parabolica corrispondono ad un intervallo decimale di una scala principale. Nell'estrazione di una radice quadrata, che può essere effettuata con l'uso del cursore o con una origine dello scorrevole, il numero deve essere collocato sulla sezione sinistra o destra della scala parabolica a seconda del numero di cifre intere che lo costituiscono, ovvero del numero di zeri che lo precedono ⁽¹⁰⁾.

Esempi:	$\sqrt{123} = 11.09$	$(123 = 1.23 \cdot 10^2)$
	$\sqrt{1230} = 35.07$	$(1230 = 12.3 \cdot 10^2)$
	$\sqrt{12300} = 350.7$	$(12300 = 1.23 \cdot 10^4)$
	$\sqrt{0.0123} = 0.1109$	$(0.0123 = 1.23 \cdot 10^{-2})$
	$\sqrt{0.00123} = 0.03507$	$(0.00123 = 12.3 \cdot 10^{-2})$

Nel caso di **espressioni composte**, cioè espressioni nelle quali compaiono sia quadrati e/o radici, sia fattori e/o divisori lineari, questi ultimi possono essere calcolati tanto con le scale paraboliche, quanto con quelle principali.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati che si leggono, allineando con il cursore un valore **a** sulla scala **Y** in opposizione ad un valore **b** su una qualsiasi altra scala dello scorrevole, rispettivamente in corrispondenza della linea di fede del cursore, dell'origine delle scale dello scorrevole ⁽¹¹⁾ e dell'origine della scala parabolica dello statore ⁽¹²⁾.

¹⁰ Se il numero di cifre intere, ovvero di zeri dopo la virgola è dispari, si usa la sezione di sinistra; se invece è pari si usa la sezione di destra. Ancora più semplice è scomporre il numero in una potenza pari di 10: così facendo diviene immediato individuare su quale sezione collocare il radicando.

¹¹ Origine di sinistra se $a > b$; origine di destra se $a < b$

¹² Origine di sinistra se $a < b$; origine di destra se $a > b$

$\sqrt{X}$	a^2	$\frac{a^2}{b^2}$	1	a^2	a^2b^2	1	a^2	a^2b	1	a^2	$\frac{a^2}{b}$	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	$\frac{b^2}{a^2}$	$\frac{1}{b^2}$	1	$\frac{1}{a^2b^2}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{1}{a^2b}$	b	1	$\frac{b}{a^2}$	y^2
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{b^2}$	1	$\frac{a^2}{b^2}$	b^2	1	a^2b^2	b	1	a^2b	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{a^2}{b}$	$\frac{1}{y^2}$
$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{a}{b}$	b	1	ab	$\sqrt{b}$	1	$a\sqrt{b}$	$\frac{1}{\sqrt{b}}$	1	$\frac{a}{\sqrt{b}}$	$\frac{1}{y}$
y	b	1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{\sqrt{b}}$	1	$\frac{1}{a\sqrt{b}}$	$\sqrt{b}$	1	$\frac{\sqrt{b}}{a}$	y
Y	a	$\frac{a}{b}$	1	a	ab	1	a	$a\sqrt{b}$	1	a	$\frac{a}{\sqrt{b}}$	1	Y

la successiva tabella equivale alla precedente, tranne che per il fatto che **a** è posto sulla scala $\sqrt{X}$.

$\sqrt{X}$	a	$\frac{a}{b^2}$	1	a	ab^2	1	a	ab	1	a	$\frac{a}{b}$	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{1}{b^2}$	1	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{1}{ab}$	b	1	$\frac{b}{a}$	y^2
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{b^2}$	1	$\frac{a}{b^2}$	b^2	1	ab^2	b	1	ab	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{y^2}$
$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{\sqrt{a}}{b}$	b	1	$\sqrt{a} \cdot b$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{ab}$	$\frac{1}{\sqrt{b}}$	1	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{1}{y}$
y	b	1	$\frac{b}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{b}$	1	$\frac{1}{\sqrt{a} \cdot b}$	$\frac{1}{\sqrt{b}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{ab}}$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{\frac{b}{a}}$	y
Y	$\sqrt{a}$	$\frac{\sqrt{a}}{b}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a} \cdot b$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{ab}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	1	Y

Il regolo Faber Mathema non dispone di una specifica scala dei cubi, poiché si è ritenuto sia più funzionale allo svolgimento di calcoli in sequenza poter disporre dei risultati di cubi e radici cubiche sulle scale principali e parabolica. L'assenza di una specifica scala dei cubi non pregiudica infatti la possibilità di svolgere calcoli di questo tipo. Il **cubo e la sua radice quadrata $n^{3/2}$** , così come la **radice cubica e il suo quadrato $n^{2/3}$** , possono infatti essere calcolati per mezzo delle scale principale e parabolica in modo che compaiano sulle scale fisse per un'immediata prosecuzione di eventuali calcoli successivi.

n^3 : L'elevamento al **cubo** si può operare in due modi, trasformando l'operazione n^3 nell'operazione $n^2 \times n$:

a) utilizzando la scala parabolica Y^2 . Si imposta il numero n da elevare al cubo sulla scala Y e, in corrispondenza del suo quadrato sulla scala Y^2 , si rifeffettua la moltiplicazione per n con l'uso della scala y^2 , utilizzando uno qualsiasi degli indici 1 (0.01 – 0.1 – 1). Il risultato viene letto sulla scala Y^2 .

Esempi:

$$2.5^3 = 15.625 \quad [Y] .25 / [y^2] 0.01 ; [y^2] 0.025 \rightarrow [Y^2] .1563 ; [y^2] 0.25 \rightarrow [Y^2] 1.563$$

$$0.52^3 = 0.1406 \quad [Y] .52 / [y^2] 1 ; [y^2] 0.052 \rightarrow [Y^2] .0141 ; [y^2] 0.52 \rightarrow [Y^2] 0.141$$

b) utilizzando la scala parabolica reciproca $1/y^2$. Si imposta il numero n da elevare a potenza sulla scala Y in opposizione al medesimo numero impostato sulla scala parabolica reciproca $1/y^2$ e, in corrispondenza di uno qualsiasi degli indici 1 (0.01 – 0.1 – 1) della scala parabolica dello scorrevole y^2 si legge il risultato sulla scala parabolica Y^2 dello statore. Non ha importanza in che intervallo della scala parabolica reciproca si imposti il numero da elevare al cubo, ovvero si legga il risultato sulla scala parabolica principale.

Esempi:

$$2.5^3 = 15.625 \quad [Y] .25 / [1/y^2] 25 ; [y^2] 0.01 \rightarrow [Y^2] .0156 ; [y^2] 0.1 \rightarrow [Y^2] .156 ; [y^2] 1 \rightarrow [Y^2] 1.56$$

$$[Y] .25 / [1/y^2] 2.5 ; [y^2] 0.1 \rightarrow [Y^2] .0156 ; [y^2] 1 \rightarrow [Y^2] .156$$

$$5.2^3 = 140.6 \quad [Y] .52 / [1/y^2] 5.2 ; [y^2] 0.01 \rightarrow [Y^2] .0141 ; [1/y^2] 0.1 \rightarrow [Y^2] 0.141 ; [1/y^2] 1 \rightarrow [Y^2] 1.41$$

La corretta collocazione della virgola decimale richiede una stima dell'ordine di grandezza del risultato. Negli esempi precedenti, era ovvio attendersi che il risultato di 2.5^3 fosse compreso fra $2^3 = 8$ e $3^3 = 27$, come pure che quello di 5.2^3 fosse prossimo a 125. Ovvio come comportarsi per i multipli e i sottomultipli di 10.

$$25^3 = (2.5 \times 10)^3 = 15.625 \times 1000 = 15625;$$

$$0.025^3 = (2.5 \times 10^{-2})^3 = 15.625 \times 10^{-6} = 0.000015625$$

$n^{3/2}$: Il calcolo delle **radici quadrate di numeri elevati al cubo**, può essere operato in tre modi:

a) usando le scale Y e $1/y^2$. Si oppone al radicando su Y il radicando sulla scala $1/y^2$ col suo esatto valore⁽¹³⁾: il risultato si legge sulla scala Y in corrispondenza dell'indice 1 (oppure 0.1 a seconda dei casi⁽¹⁴⁾) della scala y.

Es: $2^{3/2}$ [Y] .2 / [$1/y^2$] 2 ; [y] 1 → [Y] .283 quindi, $2^{3/2} = 2.83$;
 $20^{3/2}$ [Y] .2 / [$1/y^2$] 20 ; [y] 1 → [Y] .894 quindi, $20^{3/2} = 89.4$;
 $70^{3/2}$ [Y] .7 / [$1/y^2$] 70 ; [y] 0.1 → [Y] .5855 quindi, $70^{3/2} = 585.5$;
 $9^{3/2}$ [Y] .9 / [$1/y^2$] 9 ; [y] 0.1 → [Y] .27 quindi, $9^{3/2} = 27$;

b) usando le scale Y^2 e $1/y$. Si imposta il radicando col suo esatto valore sulla scala Y^2 ⁽¹⁸⁾ in opposizione al radicando sulla scala $1/y$ e si legge il risultato sulla scala Y in corrispondenza dell'indice 1 (oppure 0.1 a seconda dei casi⁽¹⁹⁾) della scala y.

Es: $2^{3/2}$ [Y^2] .02 / [$1/y$] 2 ; [y] 1 → [Y] .283 quindi, $2^{3/2} = 2.83$;
 $20^{3/2}$ [Y^2] .2 / [$1/y$] 2 ; [y] 1 → [Y] .894 quindi, $20^{3/2} = 89.4$;
 $70^{3/2}$ [Y^2] .7 / [$1/y$] 7 ; [y] 0.1 → [Y] .5855 quindi, $70^{3/2} = 585.5$;
 $9^{3/2}$ [Y^2] .09 / [$1/y$] 9 ; [y] 0.1 → [Y] .27 quindi, $9^{3/2} = 27$;
 $0.25^{3/2}$ [Y^2] .25 / [$1/y$] 2.5 ; [y] 0.1 → [Y] .125 quindi, $0.25^{3/2} = (25 \times 10^{-2})^{3/2} = 125 \times 10^{-3} = 0.125$;

c) operando con i metodi visti per calcolare il cubo di un numero n, ma leggendo ovviamente il risultato sulla scala Y.

Es: $2.5^{3/2} = 3.953$ [Y] .25 / [y^2] 0.01 ; [y^2] 0.025 → [Y] .395 oppure : [Y] .25 / [$1/y^2$] 2.5 ; [$1/y^2$] 1 → [Y] .395
 $0.52^{3/2} = 0.375$ [Y] .52 / [y^2] 1 ; [y^2] 0.52 → [Y^2] 0.375 ($0.52 = 52 \times 10^{-2}$)
 $5.2^{3/2} = 11.85$ [Y] .52 / [$1/y^2$] 5.2 ; [$1/y^2$] 100 → [Y] .1185 ; [$1/y^2$] 1 → [Y] 1.185

¹³ I numeri multipli pari o nulli di 10 (ad es. 2, 200, 20000, 0.02) si imposteranno sulla scala $1/y^2$ nella sezione di scala compresa fra 1 e 10; i numeri multipli dispari di 10 (ad es. 15, 1500, 0.15) si imposteranno nel tratto di scala compreso fra 10 e 100. Quale che sia il metodo utilizzato, è comunque sempre buona norma effettuare una stima di massima del risultato: così facendo si eviterà di commettere errori macroscopici, anche laddove si sbagliasse impostazione sulle scale paraboliche.

Es. $0.0047^{3/2} = (4.7 \times 10^{-3})^{3/2}$ può essere grossolanamente stimato come $5^{3/2} \times 10^{-1/2} = 125^{1/2} \times 10^{-2} \approx 11 \times 10^{-2}$. Allora, se anche sbagliamo ad impostare il valore sulla scala parabolica che abbiamo scelto di utilizzare, sapremo dove andare a cercare il risultato:

Es. [Y] .47 / [$1/y^2$] 47 ; [$1/y^2$] 10 → [Y] 1.02 quindi, $4.7^{3/2} = 1.02 \times 10^{-2} = 0.0102$

¹⁴ Se il risultato viene letto in corrispondenza dell'indice 1 della scala y, allora avrà lo stesso ordine decimale del radicando n. Se invece viene letto in corrispondenza dell'indice 0.1 della scala y, allora il risultato deve essere amplificato di un fattore 10.

n^{1/3}: La **radice cubica** viene trovata per tentativi e operando una stima preventiva: impostato il radicando sulla scala parabolica principale Y^2 in opposizione all'origine delle scale dello scorrevole, si sposterà il cursore finché non si riuscirà a sovrapporlo su due letture identiche sulle scale $1/y^2$ e Y coerenti con la stima preventivamente effettuata, che sono la radice cercata ⁽¹⁵⁾.

La stima preventiva è importante perché, a parità di impostazione, sul regolo calcolatore possono essere lette tre diverse radici cubiche dipendenti dal moltiplicatore decimale del radicando:

$$\text{es: } \sqrt[3]{8} = 2.00 \quad \sqrt[3]{80} = 4.31 \quad \sqrt[3]{800} = 9.28$$

Scegliendo opportunamente l'origine della scala $1/y^2$ da sovrapporre al radicando impostato sulla scala Y^2 in modo che sia garantita la più ampia sovrapposizione fra le scale Y e $1/y^2$, diventa agevole individuare tutte le tre possibili radici cubiche associabili ai tre possibili ordini di grandezza del radicando e, in virtù della stima preventiva, individuare quale di queste costituisca il risultato cercato.

Ad esempio, se cerchiamo la radice cubica di 275, l'impostazione e le relative letture saranno le seguenti:

$$[Y^2] .275 / [1/y^2] 100 \rightarrow [Y] .14 / [1/y^2] 140 ; [Y] .302 / [1/y^2] 30.2 \rightarrow [Y] .65 / [1/y^2] 6.5$$

Nell'esempio riportato sopra, è evidente che il valore 1.4 costituirà la radice cubica di 2.75; il valore 3.02 costituirà la radice cubica di 27.5 e il valore 6.5 costituirà la radice cubica di 275, pertanto è quest'ultimo che costituisce la soluzione del nostro problema.

L'ubicazione del radicando sulla scala Y^2 è del tutto arbitraria, non avendo influenza alcuna sul risultato. Infatti, una volta impostato il radicando sulla scala Y^2 laddove si ritiene più utile e avergli messo in opposizione il più comodo dei tre indici 0.1, 10 o 100 della scala $1/y^2$, in opposizione ai restanti indici che cadono in corrispondenza della scala Y^2 si troverà sempre il medesimo numero ⁽¹⁶⁾.

Esempi:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{79.5} = 4.3 & (\text{stima} = 4, \text{ perché } 4^3 = 64) \quad [Y^2] .795 / [1/y^2] 1 \rightarrow [Y] .43 / [1/y^2] 4.3 \\ \sqrt[3]{195} = 5.80 & (\text{stima} = 6, \text{ perché } 6^3 \approx 200) \quad [Y^2] .0195 / [1/y^2] 100 \rightarrow [Y] .58 / [1/y^2] 5.8 \\ \sqrt[3]{1730} = 12.0 & (\text{stima} = 10, \text{ perché } 10^3 = 1000) \quad [Y^2] .173 / [1/y^2] 1 \rightarrow [Y] .12 / [1/y^2] 12 \\ \sqrt[3]{0.0173} = \sqrt[3]{17.3 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{17.3} = 0.259 & (\text{stima preventiva} = 2 \times 10^{-1}) \quad [Y^2] .173 / [1/y^2] 10 \rightarrow [Y] .259 / [1/y^2] 2.59 \end{array}$$

¹⁵ Ovvero, per quanto detto sopra, sulle scale Y^2 e $1/y$. La stima preventiva è necessaria perché, come si vedrà più avanti, per ogni impostazione del radicando sulla scala Y^2 è possibile trovare tre diverse coppie di valori sulle scale Y e $1/y^2$ (ovvero Y^2 e $1/y$).

¹⁶ Es. $[Y^2] .012 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y^2] 10 / [Y^2] .12 \rightarrow [1/y^2] 1 / [Y^2] 1.2$

n^{2/3}: Il calcolo della **radice cubica di numeri elevati al quadrato** è condotto in modo identico, ma ovviamente leggendo il risultato sulla scala Y².

Esempi: $2^{2/3} = 1.587$ $[Y^2] .2 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y^2] 126 / [Y] .126 / [Y^2] .01587$

$20^{2/3} = 7.37$ $[Y^2] .2 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y^2] 27.15 / [Y] .2715 / [Y^2] 0.737$

$200^{2/3} = 34.2$ $[Y^2] .2 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y^2] 5.85 / [Y] .585 / [Y^2] .342$

La complessiva impostazione dei calcoli visti sopra e i risultati conseguenti sono riportati nella sezione centrale della tabella sottostante. I risultati entro quadrato sono quelli da ricercarsi per tentativi.

$\sqrt{X}$	a^3	1	a	$\sqrt[3]{a^2}$	1	1	a	a^3	Y ²
$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{a^3}$	1	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	1	y ²
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	a	1	a^3	1	$\sqrt[3]{a}$	a	a^3	a^2	$\frac{1}{y^2}$
$\frac{1}{y}$	1	$\sqrt{a^3}$	1	$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a^3}$	a	1	$\frac{1}{y}$
y	1	$\frac{1}{\sqrt{a^3}}$	1	$\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^3}}$	$\frac{1}{a}$	1	y
Y	a	$\sqrt{a^3}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a^3}$	Y

n⁴: Le **quarte potenze** si leggono sulla scala parabolica fissa Y² in corrispondenza di uno degli indici dello scorrevole, una volta che si sia impostata la base sulla scala Y per mezzo della linea di fede del cursore e si sia mosso lo scorrevole in modo che la base si legga anche sulla scala **1/y** in corrispondenza della linea di fede del cursore. In pratica, il quadrato della base è stato moltiplicato per se stesso per mezzo della scala parabolica 1/y² reciproca della stazionaria Y².

Esempi: $2.36^4 = 31$ $[Y] .236 / [1/y] 2.36 ; [1/y] 1 \rightarrow [Y^2] .31$

$0.0785^4 = 0.000038$ $[Y] .785 / [1/y] 7.85 ; [1/y] 10 \rightarrow [Y^2] .38$

$n^{1/4}$: La **radice quarta** si ottiene in due maniere:

- a) impostando il radicando sulla scala Y^2 , opponendogli l'indice 1, 10, 100 della scala $1/y^2$ a seconda del moltiplicatore di 10 del radicando e cercando per tentativi il risultato sulle scale Y e $1/y$ come nel caso della radice cubica, previa stima sommaria.

Esempi:

$$\begin{aligned} 2^{1/4} &= 1.189 & [Y^2] .02 / [1/y^2] 1 \rightarrow [1/y] 1.19 / [Y] 0.119 \\ 20^{1/4} &= 2.115 & [Y^2] .02 / [1/y^2] 10 \rightarrow [1/y] 2.115 / [Y] 0.2115 \\ 200^{1/4} &= 3.760 & [Y^2] .02 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y] 3.76 / [Y] 0.376 \\ 2000^{1/4} &= 6.69 & [Y^2] .2 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y] 6.69 / [Y] 0.669 \\ 0.075^{1/4} &= 0.523 & [Y^2] .075 / [1/y^2] 100 \rightarrow [1/y] 5.23 / [Y] 0.523 \quad (0.075 = 75 \times 10^{-4}) \end{aligned}$$

- b) estraendo la radice quadrata due volte; nel fare ciò si tenga conto delle regole sull'individuazione del corretto intervallo decimale della soluzione ⁽¹⁷⁾.

Esempi:

$$\begin{aligned} 2^{1/4} &= 1.189 & [Y^2] .02 / [Y] .1415 ; [Y^2] 0.01415 \rightarrow [Y] 0.119 \\ 20^{1/4} &= 2.115 & [Y^2] .2 / [Y] .4475 ; [Y^2] 0.04475 \rightarrow [Y] 0.2115 \\ 200^{1/4} &= 3.760 & [Y^2] .02 / [Y] 0.1415 ; [Y^2] 0.1415 \rightarrow [Y] 0.376 \\ 2000^{1/4} &= 6.69 & [Y^2] .2 / [Y] 0.4475 ; [Y^2] 0.4475 \rightarrow [Y] 0.669 \\ 0.075^{1/4} &= 0.523 & [Y^2] .75 / [Y] 0.274 ; [Y^2] 0.274 \rightarrow [Y] 0.523 \quad (0.075 = 75 \times 10^{-4}) \end{aligned}$$

Le scale Pitagoriche $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$ e $\sqrt{X^2-1} \dots \sqrt{1+Y^2}$

Le due scale Pitagoriche costituiscono, in collegamento con la scala principale, una rappresentazione grafica delle **relazioni fra i lati del triangolo rettangolo unitario**.

La **scala circolare** $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$ fornisce, in collegamento con la scala principale, una delle due coordinate di un punto posto sulla circonferenza di raggio unitario in funzione dell'altra, quindi consentono di calcolare il coseno di un angolo in funzione del corrispondente seno e viceversa. Le coordinate (x, y) dei punti del cerchio unitario sono infatti i cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa unitaria e cateti lunghi rispettivamente x e y.

¹⁷ Facendo cioè attenzione a reimpostare in maniera corretta sulla scala Y^2 il risultato della prima estrazione di radice letta sulla scala Y. Ad esempio, facendo la radice di 200, il primo risultato che si legge sarà 1.4.3 (tanto che impostiamo 0.02 oppure 2 sulla scala Y^2), che in questo caso significa 14.3 e che, quindi, andrà reimpostato come tale sulla scala Y^2 .

La **scala iperbolica** $\sqrt{X^2 - 1} \dots \sqrt{1 + Y^2}$ fornisce, in collegamento con la scala principale, una delle due coordinate di un punto posto sull'iperbole unitaria in funzione dell'altra, quindi consentono di calcolare pertanto, la tangente di un angolo in funzione della corrispondente secante e viceversa. Le coordinate di un punto dell'iperbole unitaria sono infatti un lato e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente l'altro cateto = 1, cioè di un triangolo rettangolo avente un lato unitario.

Poiché le scala Pitagoriche, come pure le altre scale di funzioni trascendenti, devono necessariamente essere interrotte su uno o entrambi i lati, le relazioni di estremità non potranno essere calcolate direttamente con il regolo calcolatore. In questi casi dobbiamo fare uso di formule approssimate derivanti dal corrispondente sviluppo in serie infinita. Per valori piccoli di **x**, è di solito sufficiente interrompere gli sviluppi in serie al termine lineare o, al più, quadratico, stabilendo pertanto una relazione lineare o quadratica tra le variabili dipendente ed indipendente.

In molti casi, la sezione del regolo sulla quale si dovrebbe effettuare la lettura di un risultato cade fuori dalla scala pitagorica (e quindi anche da tutte le altre ad essa associate). In questi casi, è possibile ottenere il risultato desiderato **raddoppiando** o **dimezzando** preventivamente i due lati noti del triangolo dato e successivamente dividendo o raddoppiando il risultato ottenuto.

La tavola seguente mostra le mutue relazioni tra scale pitagoriche e scale principali quando il regolo è in posizione di base (cioè con le scale Y e y in posizione coincidente), detta **z** la cifra impostata su ognuna delle scale. L'utilità di queste relazioni risiede non solo nella possibilità di un loro uso diretto, ma anche e soprattutto nell'elevato grado di precisione dei risultati che da esse si ottengono.

$\sqrt{X^2 - 1}$	$\sqrt{2 - z^2}$	$\sqrt{1 + z^2}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{z}}$	$\sqrt{1 + z}$	z	$\sqrt{1 + Y^2}$
$\sqrt{x}$	$1 - z^2$	z^2	$\frac{1}{z^2}$	$\frac{1}{z}$	z	$z^2 - 1$	y^2
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{1 - z^2}$	$\frac{1}{z^2}$	z^2	z	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{z^2 - 1}$	$\frac{1}{y^2}$
$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$	$\frac{1}{z}$	z	$\sqrt{z}$	$\frac{1}{\sqrt{z}}$	$\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$	$\frac{1}{y}$
Y	$\sqrt{1 - z^2}$	z	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{\sqrt{z}}$	$\sqrt{z}$	$\sqrt{z^2 - 1}$	Y
$\sqrt{1 - X^2}$	z	$\sqrt{1 - z^2}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{z}}$	$\sqrt{1 - z}$	$\sqrt{2 - z^2}$	$\sqrt{1 - Y^2}$

Le scale Trigonometriche e Arco-Trigonometriche $\sin X^g \dots {}^g\sin Y$ e $\tan X^g \dots {}^g\tan Y$ ⁽¹⁸⁾

Le scale Trigonometriche e Arco-Trigonometriche in collegamento con le scale principali, forniscono le funzioni trigonometriche e gli angoli deducibili direttamente dal triangolo rettangolo unitario.

Nel regolo calcolatore è conveniente organizzare le scale trigonometriche in modo che, dato un angolo, si possa leggere la funzione trigonometrica sulle scale principali, così da poter eventualmente proseguire i calcoli, mentre gli angoli stessi possono essere soltanto letti sulla scala trigonometrica. Ciò è giustificato dal fatto che è poco frequente vengano richiesti gli angoli in sé, mentre invece abbiamo più spesso bisogno di conoscere il valore di determinate funzioni associate a certi angoli. Lo stesso vale per gli argomenti delle funzioni iperboliche.

La tavola seguente mostra le mutue relazioni tra scale trigonometriche, scale principali e scale pitagoriche in funzione dell'impostazione dell'argomento x sulle scale trigonometriche $\sin x$ oppure $\tan x$.

$\tan x$	0	x		50^g	$\arctan y$
$\sqrt{x^2 - 1}$	1		$\sec x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1 + y^2}$
$1/y$	∞	$\operatorname{cosec} x$	$\cot x$	1	$1/y$
y	0	$\sin x$	$\tan x$	1	Y
$\sqrt{1 - x^2}$	1	$\cos x$		0	$\sqrt{1 - y^2}$
$\sin x$		x		100^g	$\arcsin y$

¹⁸ ${}^g\sin Y$ è l'abbreviazione usata per indicare $\arcsin Y$ e, analogamente, per le altre funzioni trigonometriche inverse.

Viceversa, la tavola seguente mostra le mutue relazioni tra scale trigonometriche, scale principali e scale pitagoriche in funzione dell'impostazione dell'argomento y sulle scale principali Y e 1/y.

tan x	0	arctan y	arccot y ⁽¹⁹⁾	50 ^g	arctan y
1/y	∞		1/y	1	1/y
y	0		y	1	Y
sin x		arcsin y	arcsec y	100 ^g	arcsin y

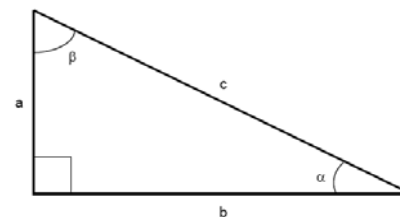
Sebbene in matematica pura l'argomento naturale per la misura degli angoli sia il radiante, l'esigenza pratica del calcolo numerico impone l'adozione di argomenti d'uso più agevole. Osservando che l'argomento naturale delle funzioni trigonometriche e iperboliche è spesso riferito a multipli di $\pi/2$, la suddivisione più pratica da adottarsi per le misure angolari è parsa allora il **grado centesimale**, dal momento che con questo sistema l'angolo retto viene suddiviso in 100 gradi. Ciò consente infatti conversioni più agevoli e senza la necessità dei passaggi intermedi ai quali spesso costringono i sistemi di suddivisione sessagesimali o sessadecimali ⁽²⁰⁾.

La scala sin X^g .. ^gsin Y è strettamente collegata alla scala circolare $\sqrt{1-X^2} \cdot \sqrt{1-Y^2}$.

Dalla scala principale risulta $Y = \sqrt{1-X^2} = \sin X^g$. Da qui discende che $\sqrt{1-Y^2} = \cos X^g$, come pure il fatto che la linea di fede del cursore mostra contemporaneamente i tre valori dei due cateti del triangolo di ipotenusa unitaria ed il relativo angolo.

Il lato **a** di un qualsiasi triangolo rettangolo avente ipotenusa **c** e l'altro cateto **b** si trova con:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2}$$

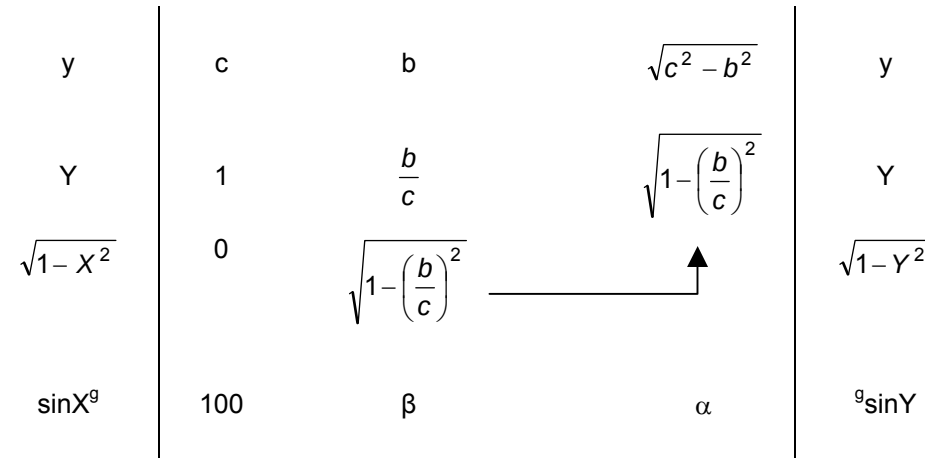


¹⁹ $\arctan Y^g = 100^g - \text{arccot } Y^g = 100^g - \arctan(1/y)$; $\text{arccot } Y^g = 100^g - \arctan Y^g$.

²⁰ Il grado centesimale è un'unità di misura dell'angolo facente parte del sistema metrico sviluppato in Francia nel XVIII secolo sotto la spinta di Luigi XVI e corrisponde a 1/400 dell'angolo giro ovvero 1/100 dell'angolo retto. Il grado centesimale equivale dunque a 9/10 di un grado sessagesimale o sessa decimale ed a $\pi/200$ radianti. L'uso del grado centesimale è rimasto molto limitato nel tempo e con l'arrivo del Sistema internazionale di unità di misura la sua diffusione si è ulteriormente ristretta. E' dunque singolare che, in assoluta controtendenza, Faber avesse scelto di utilizzare negli anni '50 del secolo scorso questa unità di misura. E' tuttavia vero che il grado centesimale ha sempre avuto e continua ad avere notevole diffusione pratica nei calcoli topografici, risultando molto agevole nel sommare o sottrarre angoli. Oggi, con la sempre maggiore diffusione della geomatica, l'uso del grado centesimale sta nuovamente prendendo piede, dal momento che i moderni strumenti di misura elettronica sono quasi esclusivamente centesimali.

Nel Regolo Calcolatore Mathema le relazioni fra i lati di un triangolo dato e quelli di un triangolo di ipotenusa unitaria sono generate in accordo con la seconda di queste equazioni.

A questo proposito, si pone **c** sulla scala **y** in opposizione all'indice 1 della scala **Y** o, se necessario, all'indice opposto 0.1. Ponendo la linea del cursore su **b** nella scala **y** otterremo **b/c** nella scala **Y**⁽²¹⁾ e, in corrispondenza di tale valore, leggeremo il valore $\sqrt{1-(b/c)^2}$ nella scala circolare $\sqrt{1-Y^2}$, come pure l'ampiezza dell'angolo β nella scala **sin X**^g.. ^g**sin Y**. Mantenendo fermo lo scorrevole, se con il cursore impostiamo ora sulla scala **Y** la quantità $\sqrt{1-(b/c)^2}$ appena letta sulla scala circolare, sulla scala **y** leggeremo il valore del cateto incognito $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ⁽²²⁾, mentre sulla scala **sin X**^g.. ^g**sin Y** leggeremo l'ampiezza dell'angolo α . Il procedimento di calcolo è mostrato passo per passo nel seguente diagramma:



Esempi: $c = 6.78; b = 4.56 \rightarrow a = 5.02; \alpha = 53.0^g; \beta = 47.0^g$ $[Y] 1 / [y] .678 ; [y] 4.56 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] 0.74 \rightarrow [\sin X^g] 47.0^g ; [Y] .74 \rightarrow [y] 5.02 \rightarrow [\sin X^g] 53.0^g$
 $c = 15.0; b = 6.00 \rightarrow a = 13.75; \alpha = 73.8^g; \beta = 26.2^g$ $[Y] 0.1 / [y] .15 ; [y] 6 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] 9.165 \rightarrow [\sin X^g] 26.2^g ; [Y] 9.165 \rightarrow [y] 1.375 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] 73.8^g$
 $c = 15.0; b = 1.50 \rightarrow a = 14.93; \alpha = 93.6^g; \beta = 6.4^g$ $[Y] 0.1 / [y] 1.5 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] 9.95 \rightarrow [\sin X^g] 6.38^g ; [Y] 9.95 \rightarrow [y] 1.493; \alpha = 100^g - 6.38^g = 93.62^g$

²¹ Operando in questo modo, non si è fatto altro che impostare il rapporto b / c nella forma $1/c \cdot b$

²² Per effetto del precedente posizionamento dello scorrevole, per ogni valore n della scala **Y** sulla scala **y** leggiamo il valore $c \cdot n$. In corrispondenza quindi del valore $\sqrt{1-(b/c)^2}$ su **Y**, sulla scala **y** leggeremo il valore $c \cdot \sqrt{1-(b/c)^2} = \sqrt{c^2 - b^2} = a$.

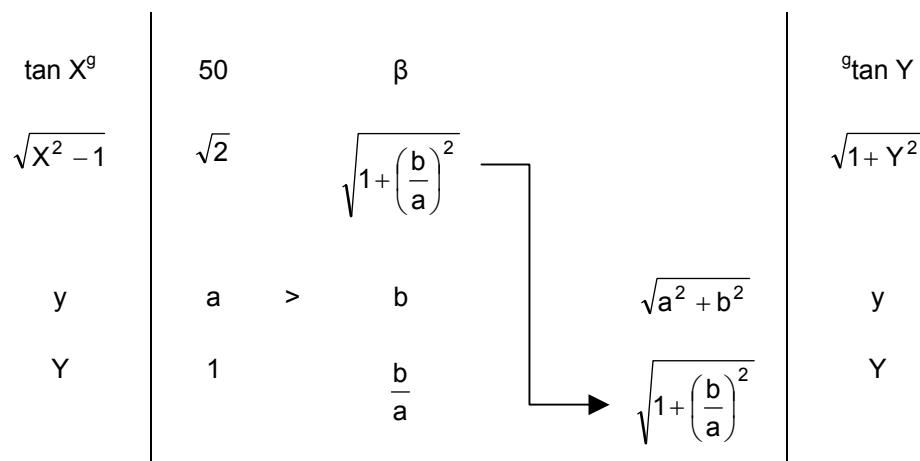
Espressioni come $\sqrt{d^2 - c^2 - b^2}$ possono essere calcolate ripetendo il procedimento di calcolo.

Esempio: $\sqrt{987^2 - 654^2 - 321^2} = 666$ $[Y] 1 / [y] .987 ; [y] .654 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] .75 ; [Y] .75 \rightarrow [y] .741 ; [Y] 1 / [y] .741 ; / [y] .321 \rightarrow [\sqrt{1-X^2}] .901 ; [Y] .901 \rightarrow [y] .666$

Noti i due cateti, l'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo può essere trovata con la nota relazione:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Consideriamo $a > b$. Sul Regolo Calcolatore Mathema generiamo la relazione fra i due cateti del triangolo dato e i corrispondenti cateti del triangolo unitario in base alla seconda di queste equazioni. Per questo, poniamo a sulla scala y in opposizione all'indice 1 della scala Y , o dell'indice 0.1 se necessario. Se si pone allora la linea di fede del cursore su b nella scala y , troveremo b/a sulla scala Y , $\sqrt{1 + (b/a)^2}$ sulla scala iperbolica e l'angolo β sulla scala $\tan X^g$. $^g\tan Y$. Impostando sulla scala Y il valore trovato di $\sqrt{1 + (b/a)^2}$ con l'aiuto del cursore e mantenendo fermo lo scorrevole, troveremo l'ipotenusa cercata $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ sulla scala y senza bisogno di muovere lo scorrevole. Il procedimento di calcolo è mostrato nel seguente diagramma:



Esempi: $a = 6.78; b = 4.56 \rightarrow c = 8.17; \beta = 37.6^g$
 $a = 15.0; b = 6.00 \rightarrow c = 16.16; \beta = 24.2^g$
 $a = 15.0; b = 1.50 \rightarrow c = 15.075; \beta = 6.35^g$

$[Y] 1 / [y] .678 ; [y] .456 \rightarrow [\sqrt{X^2-1}] 1.205 \rightarrow [\tan X^g] 37.6^g ; [Y] .1205 / [y] .817$
 $[Y] 0.1 / [y] .15 ; [y] .6 \rightarrow [\sqrt{X^2-1}] 1.077 \rightarrow [\tan X^g] 24.2^g ; [Y] .1077 \rightarrow [y] .1616$
 $[Y] 0.1 / [y] .15 ; [y] 1.5 \rightarrow [\sqrt{X^2-1}] 1.005 \rightarrow [\tan X^g] 6.35^g ; [Y] .1005 \rightarrow [y] .15075$

Espressioni come $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ possono essere calcolate ripetendo il procedimento di calcolo.

Esempio: $\sqrt{987^2 + 654^2 + 321^2} = 1227$ [Y] 1 / [y] .987 ; [y] .654 → [√X²-1] 1.2 ; [Y] .12 / [y] .1183 ; [Y] .1 / [y] .1183 ; [y] .321 → [√X²-1] 1.036 ; [Y] .1036 → [y] .1227

Grazie alla presenza della scala circolare $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$, con la medesima posizione del cursore possiamo leggere contemporaneamente sia **sin(X^g)** che **cos(X^g)**, quindi, noto uno dei due valori, è possibile passare all'altro anche senza conoscere il valore dell'angolo. Inoltre, quando il valore letto sulla scala principale Y è maggiore di $1/\sqrt{2} = 0.707$ (cioè X^g > 50^g), è possibile ottenere letture più precise impostando sulla scala trigonometrica il valore dell'angolo complementare X'^g = 100 - X^g.

Esempio:

per X^g = 82^g, leggiamo sin 82^g = 0.96 sulla scala Y [sin X^g] 82 → [Y] .96
 cos 82^g = 0.275 sulla scala $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$ [sin X^g] 82 → [√1-X²] .0.275

Ma se impostiamo

X^g = 18^g, leggiamo cos 18^g = sin 82^g = 0.9603 sulla scala $\sqrt{1-X^2} \dots \sqrt{1-Y^2}$ [sin X^g] 18 → [√1-X²] .9603
 sin 18^g = cos 82^g = 0.279 sulla scala Y [sin X^g] 18 → [Y] .279

Analogamente, grazie alla presenza della scala iperbolica $\sqrt{1+Y^2} \dots \sqrt{X^2-1}$, con la medesima posizione del cursore possiamo leggere contemporaneamente sia **tan(X^g)** che **sec(X^g)** ⁽²³⁾, quindi è possibile passare da uno di questi valori all'altro in base alle espressioni **sec arc tan(Y)** e **tan arc sec(Y)** senza dover prima determinare il valore dell'angolo. Inoltre, **sec(X^g)** può essere letto con maggior precisione sulla scala iperbolica impostando **cos(X_g)** sulla scala 1/y.

Le relazioni fra le funzioni trigonometriche per angoli semplici, doppi, dimezzati e le funzioni algebriche derivate da queste sono riportate in forma tabellare a **pag.60**, unitamente alle analoghe relazioni tra funzioni iperboliche.

²³ $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$

Scale esponenziali e logaritmiche

Poiché funzioni esponenziali e logaritmiche rivestono uguale importanza, il Regolo Calcolatore Mathema è dotato sia della funzione $(e^X) \dots (\ln Y)$, sia della funzione $(\ln X) \dots (e^Y)$. Ciò consente di poter sempre eseguire calcoli in maniera diretta. Le funzioni esponenziali di base e^X ed e^{Xg} ⁽²⁴⁾ e le relative funzioni logaritmiche inverse $\ln Y$ e ${}^g \ln Y$ sono presenti con due scale sul fronte dello statore. Viceversa, le funzioni logaritmiche di base $\ln X$ e $-\ln X$ e le relative funzioni esponenziali inverse e^Y ed e^{-Y} sono presenti sul dorso dello statore in due scale suddivise in tre sezioni.

Come detto, questa impostazione consente di poter sempre eseguire calcoli in maniera diretta, tali cioè da disporre del risultato sulla scala principale Y laddove esso sia a sua volta elemento per un calcolo successivo. Tuttavia, va notato che la precisione della lettura cambia in maniera significativa, a seconda che si utilizzi una funzione di base oppure la sua inversa. Al crescere dell'esponente, la precisione di lettura della funzione esponenziale di base e^X aumenta, mentre quella della funzione inversa e^Y decresce. I due livelli di accuratezza di lettura tendono a coincidere quando l'esponente è 1, quindi quando il risultato letto sulla scala Y è $e^1 = 2.718281828459 = 1 / 0.3678794412$. Lo stesso vale a proposito dell'accuratezza di lettura dei logaritmi.

Le funzioni esponenziali di base e^{Xg} , e^X e le funzioni logaritmiche inverse $\ln Y^g$, $\ln Y$

Il regolo Faber Mathema presenta, sul fronte dello statore, le due scale esponenziali $(e^{Xg}) \dots ({}^g \ln Y)$ ed $(e^X) \dots (\ln Y)$ rispettivamente collocate sulla parte superiore e sulla parte inferiore dello statore. Entrambe lavorano in collegamento con la scala principale Y e con la sua inversa $1/y$ e sono particolarmente utili per calcolare con buona precisione esponenziali e logaritmi naturali. Su di un regolo calcolatore logaritmico, queste scale presentano graduazione uniforme e ciò fa sì che su di esse sia possibile rappresentare qualsiasi numero, a meno di una costante additiva k , mantenendo sempre valido l'ambito decimale della scala principale alla quale esse sono funzionalmente collegate ⁽²⁵⁾. Le due scale $(e^{Xg}) \dots ({}^g \ln Y)$ ed $(e^X) \dots (\ln Y)$ hanno struttura identica e differiscono fra loro semplicemente per la modalità di rappresentazione dell'argomento e, conseguentemente, per la costante additiva k ad esse associata.

L'uso pratico della costante additiva k è quello di riportare qualsiasi argomento esponenziale all'ambito di rappresentazione sulla scala Y , a meno di una potenza di 10, scomponendolo in multipli della costante additiva e in un resto: quest'ultimo resto sarà l'effettivo argomento di calcolo sulla scala del regolo, al cui risultato andremo ad associare la potenza di 10 collegata al moltiplicatore intero della costante additiva. Diviene quindi fondamentale poter rapidamente effettuare a mente la scomposizione: al riguardo, conviene dunque usare comodi arrotondamenti della costante additiva e, a tal fine, il cursore del Regolo Calcolatore Mathema riporta superiormente e inferiormente 10 appositi indici, adeguatamente disposti, ai quali corrispondono, sul bordo superiore per la scala $(e^{Xg}) \dots ({}^g \ln Y)$ e sul bordo inferiore per la scala $(e^X) \dots (\ln Y)$, le costanti arrotondate alle quali è associata la potenza di 10 per la quale andrà moltiplicato il risultato che si andrà a leggere sulla scala Y . In pratica, si imposta il valore di x sulla scala e^{Xg} ovvero e^X a seconda della necessità, utilizzando l'indice del cursore appropriato e, in corrispondenza della linea di fede centrale del cursore, si leggerà sulla scala principale Y (o $1/y$) il valore cercato, da leggersi con il suo valore **effettivo** riportato sulla scala e moltiplicato per la

²⁴ La funzione di base è quella per cui, impostato il valore di x sulla scala funzionale, il valore della funzione è letto sulla scala principale Y o sulla sua inversa $1/y$.

²⁵ Ad esempio, il valore di e^z e il valore di e^{z+k} differiscono soltanto per una potenza di 10, quindi sono letti in corrispondenza del medesimo indice della scala Y .

potenza di 10 riportata in corrispondenza dell'indice di impostazione utilizzato. Analogamente, il risultato di e^{-xg} (ovvero e^{-x}) sarà letto sulla scala **1/y** e sarà diviso per la potenza di 10 associata all'indice utilizzato. Opportuni esempi chiariranno meglio la teoria qui illustrata.

La scala $(e^{xg}) \dots ({}^g\ln Y)$, collocata all'estremità superiore dello statore, è essenzialmente pensata per i calcoli iperbolici ed è quindi strutturata in modo da consentire il calcolo speditivo di esponenziali di multipli di π ⁽²⁶⁾ o comunque riferiti a valori angolari. La sua costante additiva k vale $(200/\pi) \cdot \ln 10 = 146.587119^g$. La tabella seguente riporta i valori nk in funzione del moltiplicatore intero n.

n	$n \cdot \frac{200}{\pi} \cdot \ln 10$
1	146.587119 ^g
2	293.174238 ^g
3	439.761357 ^g
4	586.348476 ^g
5	732.935595 ^g
6	879.522715 ^g
7	1026.109834 ^g
8	1172.696953 ^g
9	1319.284072 ^g

L'ovvio arrotondamento di questa costante additiva è 140^g, conseguentemente, sulla parte **superiore** del cursore del Regolo Calcolatore Mathema sono riportati 10 indici adeguatamente disposti ai quali corrispondono, sul bordo superiore, le costanti da -140 a +1120, alle quali è associata la potenza di 10 per la quale andrà moltiplicato il risultato che si andrà a leggere sulla scala Y, se l'esponente è positivo, ovvero sulla scala 1/y se l'esponente è negativo.

L'uso degli indici arrotondati è tuttavia limitato al loro ambito, senza possibilità di combinazioni lineari fra di loro. In altri termini, per la scala $(e^{xg}) \dots ({}^g\ln Y)$, il campo di applicazione degli indici arrotondati varia da e^{-140g} a e^{1305g} . Ove l'esponente fosse ad es. pari a 1410, sarebbe sbagliato puntare su $e^{xg}=10$ l'indice $[M^{700}_{(10^6)}]$ pensando ad un moltiplicatore pari a $10^{6 \times 2}$; e neppure scomporre 1410 in $1120 + 280 + 10$ e puntare su $e^{xg}=10$ l'indice $[M^{280}_{(10^3)}]$ pensando ad un moltiplicatore pari a 10^{9+3} . In questi casi, occorre operare utilizzando i multipli reali di $\ln 10$, che invece possono essere utilizzati anche in combinazione lineare, come indicato negli esempi che seguono.

²⁶ Essa può comunque essere utilizzata per calcolare qualunque esponenziale, semplicemente trasformandolo in un multiplo di π anche se, a tale riguardo, risulta più comoda la scala $e^x \dots \ln Y$.

Esempi:

$$e^{0.5\pi} = e^{100g} = 0.481 \times 10 = 4.81$$

$$[e^{Xg}] 100^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [Y] 0.481 \times 10 = 4.81$$

$$e^{-0.5\pi} = e^{-100g} = 2.08 \times 10^{-1} = 0.208$$

$$[e^{Xg}] 100^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [1/y] 2.08 \times 10^{-1} = 0.208$$

$$e^{3\pi} = e^{600g} = e^{560g + 40g} = 1.239 \times 10^4$$

$$[e^{Xg}] 40^g / \boxed{M_{(10^5)}^{560}}; \boxed{} \rightarrow [Y] 0.1239 \times 10^5 \text{ oppure:}$$

$$e^{3\pi} = e^{600g} = e^{586.35 + 13.65g} = 1.239 \times 10^4$$

$$[e^{Xg}] 13.65^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [Y] 0.1239 \times 10^5$$

$$e^{-3\pi} = e^{-600g} = e^{-560g - 40g} = 8.07 \times 10^{-5}$$

$$[e^{Xg}] 40^g / \boxed{M_{(10^5)}^{560}}; \boxed{} \rightarrow [1/y] 8.07 \times 10^{-5}$$

$$e^{10\pi} = e^{2000g} = e^{1465.87 + 439.76 + 94.36} = 4.4 \times 10^{13}$$

$$[e^{Xg}] 94.36^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [Y] 0.44 \times 10^{10+3+1}$$

$$\left. \cosh 225^g \right\} = \frac{(e^{225} \pm e^{-225})}{2} = \frac{34.27 \pm 0.0292}{2} = \begin{cases} 17.15 \\ 17.12 \end{cases}$$

$$[e^{Xg}] 85^g / \boxed{M_{(10^2)}^{140}}; \boxed{} \rightarrow [Y] .3427 \times 10^2 \rightarrow [1/y] 2.92 \times 10^{-2}$$

$$e^{+0.1\pi} \times \sin 40^g = 0.805$$

$$[\sin X^g] 40^g / [y] 1; [e^{Xg}] 20^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [Y] .137; [y] .137 \rightarrow [Y] 0.0805 \times 10$$

$$e^{-0.1\pi} \times \sin 40^g = 0.4285$$

$$[\sin X^g] 40^g / [1/y] 1; [e^{Xg}] 20^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [1/y] 4.29 \times 10^{-1}$$

$$e^{-1.2\pi} \times \sin 7^g = 0.00253$$

$$[\sin X^g] 7^g / [1/y] 10; [e^{Xg}] 100^g / \boxed{M_{(10^2)}^X}; \boxed{} \rightarrow [1/y] 2.53 \times 10^{-2} \times 10^{-1} \quad (27)$$

$$amph 60^g = 2 \arctan(e^{60g}) - 100^g = 52.7^g \quad (28)$$

$$[e^{Xg}] 60^g / \boxed{M_{(10)}^X}; \boxed{} \rightarrow [Y] 2.566; [1/y] 2.566 \rightarrow [\tan X^g] 23.56 \quad (29)$$

²⁷ Avendo posizionato in corrispondenza di $\sin 7^g$ l'origine 10 della scala 1/y dello scorrevole in modo da poter effettuare la lettura (in caso contrario il cursore sarebbe caduto fuori dall'ambito di lettura della scala), dobbiamo moltiplicare per -10 il risultato ottenuto. In pratica, infatti, abbiamo operato una trasposizione dello scorrevole per effettuare la moltiplicazione per $\sin 7^g$.

²⁸ Con *amph* si indica l'ampiezza iperbolica (o funzione di Gudermann) di un angolo x. Si tratta di un'applicazione trascendente che mette direttamente in relazione nello spazio reale le funzioni circolari con quelle iperboliche. $amph x = 2 \arctan(e^x) - \pi/2$

²⁹ Per come abbiamo impostato il calcolo, $23.56 = \operatorname{arccot}(e^{60g}) \rightarrow \arctan(e^{60g}) = 100^g - 23.56^g = 76.35^g \rightarrow amph 60^g = 2 \times 76.35^g - 100^g = 52.7^g$

La scala $(e^X) \dots (\ln Y)$, collocata all'estremità inferiore dello statore, è invece strutturata in modo da consentire il calcolo speditivo di esponenziali qualsiasi. In questo caso, la costante additiva k vale $\ln 10 = 2.302585093$. La tabella seguente riporta i valori nk in funzione del moltiplicatore intero n .

n	$n \ln 10$
1	2.302585093
2	4.605170186
3	6.907755279
4	9.210340372
5	11.512925465
6	13.815510558
7	16.118095651
8	18.420680744
9	20.723265837

L'ovvio arrotondamento di questa costante additiva è 2.2, conseguentemente, sulla parte **inferiore** del cursore del Regolo Calcolatore Mathema sono riportati 10 indici adeguatamente disposti ai quali corrispondono, sul bordo inferiore, le costanti da -2.2 a $+17.6$, alle quali è associata la potenza di 10 per la quale andrà moltiplicato il risultato che si andrà a leggere sulla scala Y , se l'esponente è positivo, ovvero sulla scala $1/y$ se l'esponente è negativo.

Anche in questo caso, l'uso degli indici arrotondati è limitato al loro ambito, senza possibilità di combinazioni lineari fra di loro. Per la scala $(e^X) \dots (\ln Y)$, il campo di applicazione degli indici arrotondati varia da $e^{-2.2}$ a $e^{20.5}$. Ove l'esponente fosse ad es. pari a 23, sarebbe sbagliato puntare su $e^{Xg}=1$ l'indice $[M^{11}_{(10^6)}]$ pensando ad un moltiplicatore pari a $10^{6 \times 2}$; e neppure scomporre 23 in $17.6 + 4.4 + 1$ e puntare su $e^{Xg}=1$ l'indice $[M^{4.4}_{(10^3)}]$ pensando ad un moltiplicatore pari a 10^{9+3} . In questi casi, occorre operare utilizzando i multipli reali di $\ln 10$, come indicato negli esempi che seguono.

Esempi:

e^2	$= 7.39$	$[e^X] \boxed{M^{2.2}_{(10)}} 2 \rightarrow [Y] 0.739 \times 10$
e^{-2}	$= 0.1353$	$[e^X] \boxed{M^{2.2}_{(10)}} 2 \rightarrow [1/y] 1.353 \times 10^{-1}$
e^4	$= e^{2.2 + 1.8} = 54.6$	$[e^X] \boxed{M^{2.2}_{(10^2)}} 1.8 \rightarrow [Y] 0.546 \times 10^2$
$e^{0.4}$	$= e^{2.2 - 1.8} = 0.0183$	$[e^X] \boxed{M^{2.2}_{(10^2)}} 1.8 \rightarrow [1/y] 1.83 \times 10^{-2}$

$e^{11} = e^{8.8 + 2.2} = 5.9900 \times 10^5$	$[e^X] \boxed{M_{(10^5)}^{8.8}} 2.2 \rightarrow [Y] 0.599 \times 10^5$ oppure:
$e^{11} = e^{9.21 + 1.79} = 5.9900 \times 10^5$	$[e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 1.79 \rightarrow [Y] 0.599 \times 10^5$
$e^{-11} = e^{-8.8 - 2.2} = 0.0000167$	$[e^X] \boxed{M_{(10^5)}^{8.8}} 2.2 / [1/y] 1.67 \times 10^{-5}$
$e^{100} = e^{92.103 + 6.6 + 1.297} = 2.69 \times 10^{43}$	$[e^X] \boxed{M_{(10^4)}^{5.6}} 1.297 / [Y] 0.269 \times 10^{40+4}$
$\ln \sqrt{1 - 0.83^2} = \ln 0.558 = -0.584$	$[\sqrt{1-X^2}] 0.83 \rightarrow [Y] 0.558 ; [1/y] 5.58 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.584$
$\ln \cos 40^g = \ln \sin 60^g = \ln 0.808 = -0.212$	$[\sin X^g] 60^g \rightarrow [Y] 0.808 ; [1/y] 8.08 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.212$
$\ln \sec 40^g = \ln (1/\cos 40^g) = \ln 1.238 = 0.212$	$[\sin X^g] 60^g \rightarrow [1/y] 1.238 ; [Y] 1.238 / [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.212$
$\ln \sinh 40^g = \ln 0.67 = -0.4$	$[\sinh x^g] 40^g \cup [Y] 0.1 \rightarrow [y] 0.67 ; P.B. [1/y] 6.7 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.4$
$\ln \sqrt{1.04^2 - 1} = \ln 0.285 = -1.253$	$[\sqrt{X^2-1}] 1.04 \rightarrow [Y] 0.285 ; [1/y] 2.85 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 1.253$
$\ln \tan 30^g = \ln 0.51 = -0.674$	$[\tan X^g] 30^g \rightarrow [Y] 0.51 ; [1/y] 5.1 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.674$
$\ln \tan 70^g = \ln \cot 30^g = \ln 1/0.51 = 0.674$	$[\tan X^g] 30^g \rightarrow [1/y] 1.96 ; [Y] .196 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.674$
$\ln \cosh 40^g = \ln 1.204 = 0.186$	$[0,1 \cosh x^g] 40^g \cup [Y] 0.1 \rightarrow [y] 1.204 ; [Y] .1204 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.186$
$\operatorname{arcsinh} .6 = \ln(.6 + \sqrt{1+.6^2}) = \ln (.6 + 1.166) = 0.569$	$[Y] 0.6 \rightarrow [\sqrt{1+Y^2}] 1.166 ; [Y] .1766 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.569$ ⁽³⁰⁾
$\operatorname{arctanh} .6 = \ln \sqrt{\frac{1+0.6}{1-0.6}} = 0.693$	$[\sqrt{X}] 1.6 / [\sqrt{x}] 0.4 ; [y] 0.1 / [Y] 0.2 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.693$ ⁽³¹⁾
$\operatorname{arc}^g \tanh 0.99996 = 344.4^g$	$[1/\sqrt{x}] 20 \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10^3)}^{4.4}} 1.01 ; [Y] 5.41 / [y] 3.14 ; [y] 2 \rightarrow [Y] 344.4$ ⁽³²⁾

³⁰ oppure $[Y] 0.1 / [y] 0.6 \cup \rightarrow [\sinh x^g] 36.25^g ; [e^{Xg}] \boxed{M_{(10)}^X} 36.25^g \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.569$

³¹ oppure $[Y] 0.1 / [y] 0.6 \cup \rightarrow [\tanh x^g] 44.1^g ; [e^{Xg}] \boxed{M_{(10)}^X} 44.1^g \rightarrow [e^X] \boxed{M_{(10)}^X} 0.693$

³² $\operatorname{arc}^g \tanh 0.99996 = \frac{-200}{\pi} \times \ln \sqrt{\frac{1-0.99996}{1+0.99996}} \approx \frac{-200}{\pi} \times \ln \sqrt{\frac{0.00004}{2}} = \frac{-200}{\pi} \times \ln \left(\sqrt{2 \times 10^{-5}} \right) = \frac{-200}{\pi} \times \ln \left(\sqrt{20 \times 10^{-6}} \right) = \frac{-200}{\pi} \times \ln (10^{-3} \times \sqrt{20})$

quindi si imposterà 20 sulla scala $1/\sqrt{x}$ con la linea di fede principale del cursore. In corrispondenza del moltiplicatore 10^{-3} , sul bordo inferiore del cursore è riportata la costante 4.4. e, in corrispondenza del rispettivo indice, si legge 1.01 sulla scala e^{Xg} , quindi $\ln 10^{-3} \sqrt{20} = -(4.4 + 1.01) = -5.41$. Moltiplicando per -200 e dividendo per π si ottiene il risultato 344.5^g.

Le funzioni logaritmiche di base $\pm \ln X$ e le funzioni esponenziali inverse $e^{\pm Y}$

Le funzioni logaritmiche di base e le funzioni esponenziali inverse sono presenti sul Regolo Calcolatore Mathema con due gruppi di scale in tre sezioni, $\pm \ln X$ per logaritmi positivi e negativi, $e^{\pm Y}$ per potenze dirette e reciproche del numero e.

Con le scale logaritmiche si possono determinare non solo i logaritmi naturali sulla scala Y, ma anche i logaritmi in una **base a qualsiasi**. E' noto infatti che la formula generale per passare dal logaritmo in una determinata base b al logaritmo in una determinata base a è:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

In particolare, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \rightarrow \ln a \times \log_a x = \ln x$

Ciò significa che, dovendo calcolare $\log_a x$, sarà sufficiente collocare una delle origini della scala y in corrispondenza della base **a** sulla scala logaritmica e andare a leggere il valore cercato sulla medesima scala y in corrispondenza del valore di x sulla scala logaritmica. Così facendo, infatti, non abbiamo fatto altro che impostare con le scale principali Y e y un prodotto tale per cui $\ln a \cdot Q = \ln x$ e, per quanto detto, Q non è altro che $\log_a x$.

Si può inoltre osservare che $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = M_a \times \ln x$, dove $M_a = \frac{1}{\ln a}$

Dal ch  si evince che i logaritmi in un sistema in base a differiscono dai logaritmi naturali di un fattore costante detto modulo ⁽³³⁾. Di particolare importanza   il modulo dei logaritmi decimali, detti "di Briggs":

$$M_{10} = \frac{1}{\ln 10} = 0.4343$$

Esempio: $\log_{10} 2 = 0.301$ $[0.1 \ln x] 10 \cup / [y] 0.1 ; [\ln x] 2 \cup \rightarrow [y] 0.301$ ma anche, utilizzando M_{10} : $[\ln x] 2 \cup / [y] 1 ; [y] 0.434 \rightarrow [Y] 0.301$
 $\log_6 24 = 1.775$ $[0.1 \ln x] 6 \cup / [y] 0.1 ; [0.1 \ln x] 24 \cup / [y] 1.775$ ma anche, utilizzando $M_6 = 0.558$: $[\ln x] 24 \cup / [y] 1 ; [y] 0.558 \rightarrow [Y] 1.775$

Da questi esempi   possibile intuire un altro uso molto importante delle scale a base logaritmica, vale a dire la possibilit  di effettuare elevamenti a potenza d'ordine qualsiasi. Elevare infatti il numero **a** alla potenza **m** con l'aiuto del regolo calcolatore equivale a impostare **m · ln a** sulla scala Y e il suo antilogaritmo sulla scala **e^Y** in accordo con la relazione:

$$\ln a^m = m \cdot \ln a$$

³³ Pi  in generale, potremo scrivere che i logaritmi calcolati in un sistema in base a differiscono dai logaritmi calcolati in un sistema in base b di un fattore costante pari a $1/\log_b a$.

Per elevare dunque ad una potenza m un numero a , basterà impostare con il cursore sulla scala logaritmica $\ln X$ il numero a da elevare a potenza e moltiplicare il valore $\ln a$, che automaticamente si leggerà sulla scala Y , per il valore della potenza m : il risultato complessivo si leggerà allora sulla scala $\ln X$ in opposizione a m sulla scala y . E' evidente che, al di là dell'aspetto formale di questa operazione, per giungere al risultato a^m non ha nessuna importanza determinare i valori intermedi di $\ln a$ e di $m \cdot \ln a$: è sufficiente conoscere i valori di a e di m .

Esempio: $1.14^{4.05} = 1.7$ [0.1 $\ln x$] 1.14 $\cup$ / [y] 0.1 ; [y] 4.05 $\cup \rightarrow$ [0.1 $\ln x$] 1.7

Per estensione, quanto detto si applica anche per $1/n = m$, vale a dire che, col medesimo metodo, si possono calcolare le radici d'ordine qualsiasi.

Esempio: $\sqrt[4.05]{1.7} = 1.14$ [0.1 $\ln x$] 1.7 $\cup$ / [y] 4.05 ; [y] 0.1 $\cup \rightarrow$ [0.1 $\ln x$] 1.14

e seguenti operazioni sono impostabili in maniera diretta, senza dover spostare lo scorrevole.

$-\ln X$	$1/a$	$1/a^m$	e^{-Y}
$1/y$	m	1	$1/y$
y	$1/m$	1	y
$\ln X$	a	a^m	e^Y

$-\ln X$	$1/a$	$1/a^{1/n}$	e^{-Y}
$1/y$	$1/n$	1	$1/y$
y	N	1	y
$\ln X$	A	$a^{1/n}$	e^Y

Esempi:

$1.05^{20} = 2.653$ [10 $\ln X$] 1.05 $\cup$ / [y] 1 ; [y] 0.2 $\cup \rightarrow$ [0.1 $\ln X$] 2.653 oppure [10 $\ln X$] 1.05 $\cup$ / [y] 0.1 ; [y] 0.2 $\cup \rightarrow$ [$\ln X$] 2.653

$0.95^{20} = 0.3585$ [-10 $\ln X$] 0.95 $\cup$ / [y] 1 ; [y] 0.2 $\cup \rightarrow$ [-0.1 $\ln X$] 0.3585

$\sqrt[5]{0.5} = 0.8705$ [-0.1 $\ln X$] 0.5 $\cup$ / [y] .5 ; [y] 1 $\cup \rightarrow$ [- $\ln X$] 0.8705

$2345^{6.7} (= 10^{6.7 \times \log 2345} = 10^{6.7 \times 3.37} = 10^{22.58} = 10^{22 + 0.58} = 10^{22} \times 10^{0.58}) = 3.8 \times 10^{22}$

[0.1 $\ln X$] 10 $\cup$ / [y] 0.1 ; [$\ln X$] 2.345 $\cup \rightarrow$ [y] 0.371; $6.7 \times 3.371 = 22.58$; [0.1 $\ln X$] 10 $\cup$ / [y] 1 ; [y] 0.58 $\cup \rightarrow$ [0.1 $\ln X$] 3.8

$$\ln(246 \times 10^8) = \ln 246 + 8 \ln 10 = 5.51 + 18.42 = 23.93 \quad [0.1 \ln X] 246 \cup / [Y] 5.51; [0.1 \ln X] 10 \cup / [Y] 1; [Y] 8 \rightarrow [Y] 18.42$$

$$e^{15} = (e^{7.5})^2 = 1810^2 = 3.27 \times 10^6 \quad [Y] 7.5 \cup / [0.1 \ln X] 1810; [Y] 1.810 \rightarrow [\sqrt{X}] 3.27$$

$$e^{\sin 40g} = 1.8 \quad [\sin X^g] 40 / [\ln X] 1.8$$

$$(\ln 10)^2 = 5.3 \quad [0.1 \ln X] 10 \cup \rightarrow [\sqrt{X}] 5.3$$

$$\ln(\ln 10) = 0.835 \quad [0.1 \ln X] 10 \cup \rightarrow [e^X] [M_{10}^X] 0.835$$

I due gruppi di scale logarithmiche presentano numeri che sono fra loro reciproci. I valori di $1/X$ per $e > X > 1/e$ saranno letti con maggiore precisione su queste scale, che non sulle scale y o $1/y$, e ciò sarà tanto più vero quanto più i numeri si avvicineranno a 1. Allo stesso modo, per $e > X > 1/e$ è assai più accurato il calcolo di X^2 e $\sqrt{X}$ sulle scale logarithmiche utilizzando i tratti 2π e 4π posti sul retro del cursore, piuttosto che operare sulle scale Y e $\sqrt{X}$ ⁽³⁴⁾.

Esempi:

$$1 / 1.01234 = 0.98781 \quad [10 \ln X] 1.01234 \rightarrow [-10 \ln X] 0.98781$$

$$1.01234^2 = 1.0248 \quad [10 \ln X] [M_{2\pi}^{\downarrow}] 1.01234 \rightarrow [10 \ln X] [M_{4\pi}^{\downarrow}] 1.0248$$

$$\sqrt{0.6543} = 0.8089 \quad [-\ln X] [M_{4\pi}^{\uparrow}] 0.6543 \rightarrow [-\ln X] [M_{2\pi}^{\uparrow}] 0.8089$$

³⁴ La distanza fra gli indici 2π e 4π , come pure quella fra gli indici $\pi/4$ e $\pi/2$, coincide con l'intervallo $1 \div 2$ della scala Y , quindi consente di elevare al quadrato, ovvero estrarre la radice quadrata, senza bisogno di girare il regolo.

Le funzioni iperboliche e le loro inverse

Così come la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ è il luogo dei punti $(\cos x, \sin x)$, analogamente l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$ può essere vista come il luogo dei punti $(\cosh x, \sinh x)$.

Da ciò dipende la relazione fondamentale $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Al contrario delle corrispondenti funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche non sono periodiche.

L'argomento x delle funzioni trigonometriche seno e coseno che definiscono la circonferenza unitaria può essere interpretato naturalmente come un angolo; l'argomento x delle funzioni iperboliche rappresenta invece il doppio dell'area del settore compreso tra il segmento che collega l'origine dell'iperbole equilatera con il punto $(\cosh x, \sinh x)$ su un ramo dell'iperbole, l'arco di tale iperbole che dal punto si conclude nel punto di vertice $(1,0)$ sull'asse delle ascisse e il segmento da questo punto all'origine.

Le funzioni iperboliche seno e coseno sono legate alla funzione esponenziale dalle seguenti relazioni:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

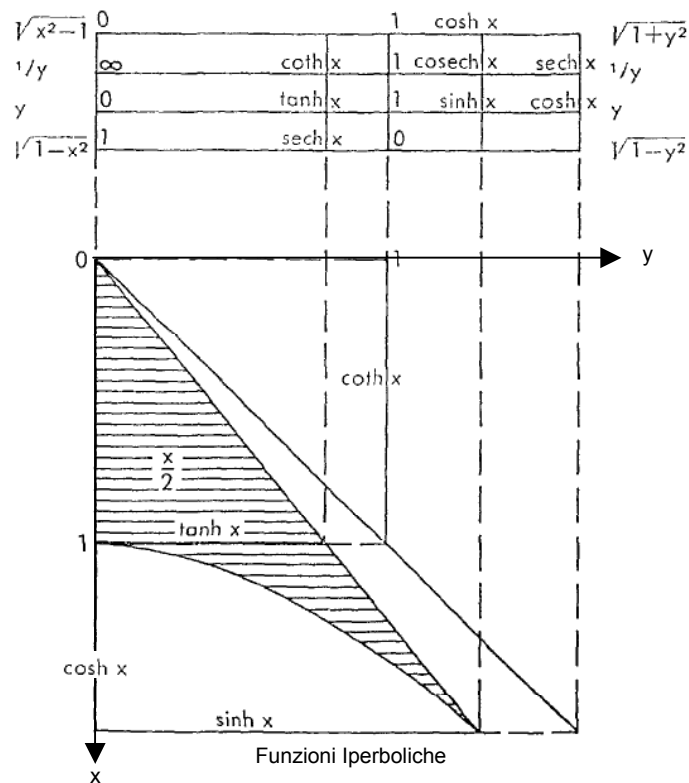
dalle quali conseguono tutte le altre:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



Sul regolo Faber Mathema, le scale delle funzioni iperboliche sono collocate sulla parte posteriore dello scorrevole. Come nel caso delle altre scale del regolo ed essendo le variabili nuovamente indicate come **x** e **y**, i numeri si riferiscono alla scala **y**. Il passaggio fra le scale iperboliche e la scala **y** avviene, da un lato, per mezzo delle linee di fede poste sulle apposite finestre aperte sul retro del regolo, e dall'altro lato per mezzo degli indici terminali della scala **Y**.

Analogamente a quanto visto per le scale trigonometriche, anche le scale delle funzioni iperboliche del regolo Faber Mathema sono limitate al campo di rappresentabilità sulla scala principale **y**.

La scala per il seno iperbolico è organizzata su due sezioni: la prima, denominata **sinh x^g..^gsinh y** riporta angoli compresi fra 4^g e 80^g e ad essa sono associati gli effettivi valori indicati sulla scala **y**. La seconda scala, denominata **0.1sinh x^g..^gsinh 10y**, riporta angoli compresi fra 40^g e 220^g ⁽³⁵⁾ e ad essa sono associati i valori indicati sulla scala **y** a meno del moltiplicatore 0.1 per il seno iperbolico e, conseguentemente, 10 per l'arcoseno iperbolico.

La scala **0.1cosh x^g..^gcosh 10y**, riporta angoli compresi fra 0^g e 220^g e ad essa sono associati i valori indicati sulla scala **y** a meno del moltiplicatore 0.1 per il coseno iperbolico e 10 per l'arcocoseno iperbolico.

La scala **tanh x^g..^gtanh y** riporta l'intero campo di variabilità della tangente iperbolica a partire da 4^g e ad essa sono associati gli effettivi valori indicati sulla scala **y**.

Esempi:

$$\sinh (0.6 \pi/2) = \sinh 60^g = 1.088 \quad [0.1\sinh x^g] 60^g \cup \rightarrow [y] 0.1088 \quad \text{oppure} \quad [\sinh x^g] 60^g \cup \rightarrow [y] 1.088$$

$$\tanh (0.4 \pi/2) = \tanh 40^g = 0.557 \quad [\tanh x^g] 40^g \cup \rightarrow [y] 0.557$$

$$^g\sinh 0.2 = 12.65^g \quad [y] 0.2 \cup \rightarrow [^g\sinh y] 12.65^g$$

$$^g\sinh 2 = 127.5^g \quad [y] 0.2 \cup \rightarrow [^g\sinh 10y] 127.5^g$$

$$\cosh \pi/4 = \cosh 50^g = 1.325 \quad [0.1\cosh x] 50^g \cup \rightarrow [y] 1.325$$

$$200/\pi \operatorname{arcsinh} 2 = ^g\sinh 2 = 91.9^g \quad [y] 0.2 \cup \rightarrow [^g\sinh 10y] 91.9^g$$

$$\ln (\cosh 50^g) = \ln 1.325 = 0.281 \quad [0.1\cosh x] 50^g \cup / [y] 1.325; [Y] 1.325 \rightarrow [e^x] \boxed{M_{10}^x} 0.281$$

Poichè $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$, per piccoli argomenti i valori di $\cosh x$ possono essere trovati con maggiore precisione usando la scala di base $\sinh x$ e la scala iperbolica $\sqrt{1 + Y^2}$, anziché usando la scala $\cosh x$.

³⁵ Per angoli superiori, sia per il seno che per il coseno, la specifica scala iperbolica perde di significato, dal momento che il termine e^{-x} diventa insignificante rispetto al termine e^x

Analogamente per $\operatorname{sech} x = \sqrt{1 - \tanh^2 x}$, che nel caso di piccoli argomenti si calcola con maggior precisione utilizzando la scala circolare $\sqrt{1 - Y^2}$.

Esempi:

$\cosh 10^g = 1.01234$	$[\sinh x] 10^g \cup / [y] 0.1576; [Y] 0.1576 \rightarrow / [\sqrt{1+Y^2}] 1.01234$
$\operatorname{sech} 10^g = 0.9878$	$[\tanh x] 10^g \cup / [y] 0.1558; [Y] 0.1558 \rightarrow / [\sqrt{1-Y^2}] 0.9878$
${}^g\cosh 1.0245 = 14.1^g$	$[\sqrt{1+Y^2}] 1.0245 / [Y] 0.223; [y] 0.223 \cup \rightarrow [\sinh x] 14.1^g$
${}^g\operatorname{sech} 0.975 = 14.38^g$	$[\sqrt{1-Y^2}] 0.975 / [Y] 0.222; [y] 0.222 \cup \rightarrow [\tanh x] 14.38^g$

Allo stesso modo, la relazione $\cosh x = 1/\operatorname{sech} x$ può essere utilmente usata per calcolare i reciproci di numeri prossimi a 1. In questo campo, risulta comunque sempre più semplice ed accurato utilizzare le scale logaritmiche $\pm \ln x$ che, come si è già detto, sono reciproche una dell'altra.

Quando si calcolano espressioni composte con funzioni iperboliche conviene sempre iniziare il settaggio partendo dalla funzione iperbolica.

Esempi:

$\sin 60^g \times \sinh 60^g = 0.881$	$[0.1 \sinh x] 60^g \cup [Y] 0.1 \rightarrow [y] 1.088; [\sin X^g] 60^g \rightarrow [y] 0.881$
$\frac{\sin 60^g}{\sinh 60^g} = 0.743$	$[0.1 \sinh x] 60^g \cup [Y] 0.1 \rightarrow [y] 1.088; [Y] 1.088 / [y] 0.1; [\sin X^g] 60^g \rightarrow [y] 0.743$

Per valori di $x > 224^g$, nel calcolo di $\sinh$ e $\cosh$ può essere trascurato il fattore $\frac{e^{-x}}{2}$, conseguentemente sarà $\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{e^x}{2}$.

Le scale di base esponenziale costituiscono così la continuazione delle scale $\sinh x^g$ e $\cosh x^g$ poste sul retro del regolo. In queste condizioni, per i termini composti si procede come segue:

moltiplicazione $f_h(x) \cdot f(x)$: una volta effettuata sulla scala Y la lettura di e^{x^g} , dobbiamo riportare questa lettura sulla scala y in corrispondenza di $Y = 2$ poi, in corrispondenza di $Y = f(x)$ si effettua la lettura sulla scala y o sulla scala 1/y a seconda dei casi.

Esempi:

$\sin 330^g \times \sinh 330^g = -79.5$	$[e^{X^g}] \boxed{M_{(10^3)}^{280}} 50^g \rightarrow [Y] .15785; [Y] 2 / [y] .15785; [\sin X^g] 70^g \rightarrow [y] 0.795^{(36)}$
$\frac{1}{\sin 330^g \times \sinh 330^g} = -0.0126$	$[e^{X^g}] \boxed{M_{(10^3)}^{280}} 50^g \rightarrow [Y] .15785; [Y] 2 / [y] .15785; [\sin X^g] 70^g \rightarrow [1/y] 1.26$

³⁶ $330 = 280 + 50$; $\sin 330^g = -\sin 70^g$

divisione $f_h(x) / f(x)$ o $f(x) / f_h(x)$: si comincia in ogni caso l'impostazione dal termine esponenziale, conseguentemente si setta il cursore in corrispondenza di e^{xg} e si pone $y = 2$ sotto la linea di fede del cursore poi, in corrispondenza di $Y = f(x)$ si effettua la lettura sulla scala y se il termine esponenziale è al denominatore della divisione, oppure sulla scala $1/y$ nel caso inverso.

Esempi: $\frac{\sin 260^g}{\sinh 260^g} = -0.0272$ [e^{xg}] M¹⁴⁰₍₁₀₂₎ 120^g / [y] 2 ; [sin X^g] 60^g → [y] .272

$\frac{\sinh 260^g}{\sin 260^g} = -36.8$ [e^{xg}] M¹⁴⁰₍₁₀₂₎ 120^g / [y] 2 ; [sin X^g] 60^g → [1/y] 3.68

Calcoli trigonometrici in gradi sessagesimali (360°)

Il regolo Castell 2/84 Mathema consente anche di risolvere problemi di questo tipo. Prima di tutto è necessario convertire il valore dell'angolo con l'aiuto delle due scale di base. Il valore 1 (= 100^g) della scala y deve essere collocato in opposizione a 9 (= 90°) della scala Y , così che il valore sessagesimale impostato su Y venga letto su y in gradi centesimali e il calcolo possa quindi proseguire nelle usuali maniere.

Esempi: $18^\circ = 20^g$, $23.5^\circ = 26^g$, $57^\circ = 63.33^g$

APPLICAZIONI PARTICOLARI

Interpolazione lineare:

L'interpolazione lineare di valori numerici dipende da una proporzionalità sufficientemente precisa tra differenza degli argomenti e differenza dei valori delle funzioni. Il regolo calcolatore può essere utilmente impiegato a questo proposito quando si devono interpolare cifre con più decimali. Il seguente metodo è adatto per l'interpolazione lineare di coppie di numeri **a** < **b** (entrambi noti nel limite della precisione del regolo), riportandoli ad una differenza prefissata **d**. Dal punto di vista teorico, il problema consiste nell'individuazione dei due termini **c₁** e **c₂ = c₁ + d** sostitutivi di **a** e **b**. Ciò è banalmente possibile calcolando le due proporzioni:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c_1}; \quad \frac{b-a}{b} = \frac{d}{c_1 + d} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{a \cdot d}{(b-a)}; \quad c_2 = c_1 + d = \frac{b \cdot d}{(b-a)} = \frac{a \cdot d}{(b-a)} + d$$

L'effettuazione di tale calcolo con il regolo è molto semplice: si imposta **d** nella scala **y** in opposizione alla differenza **b-a** nella scala **Y**; di conseguenza, il numero **a** nella scala **Y** si troverà in opposizione a un numero **c₁** nella scala **y**, come pure il numero **b** nella scala **Y** sarà opposto al numero **c₁+d** nella scala **y**; le variazioni di argomento che si leggono nella scala **y** (nell'intervallo fra **c₁** e **c₁+d**) corrispondono ai valori delle relative funzioni nella scala **Y** e viceversa. Otteniamo il seguente schema:

y	d	c ₁	c ₁ + d	y
Y	b - a	a	< b	Y

Il valore di c può essere arrotondato senza significativi effetti negativi, per semplificare la lettura dei cambiamenti dell'argomento.

Esempio: a = 456; b = 789; d = 2 → troviamo c₁ = 2.74⁽³⁷⁾.

Se l'argomento c aumenta di 0.24, passando quindi a 2.74 + 0.24 = 2.98, il valore della funzione a sarà 496⁽³⁸⁾, se l'argomento cala di 0.24, passando a 4.74 – 0.24 = 4.50, il valore della funzione è 750. In corrispondenza del valore 3.74 troveremo, com'è logico attendersi, il valore medio fra a e b = 622.5.

³⁷ b - a = 333 → [Y] .333 / [y] .2 (= d); [Y] .456 → [y] .274 (= c₁); [Y] .789 → [y] .474 (= c₁ + d)

³⁸ Letto sulla scala y

Interpolazione quadratica:

Nell'interpolazione quadratica di una funzione, la curva rappresentativa della funzione è sostituita con una parabola.

A condizione che si scelga opportunamente la parabola di sostituzione, le sue ordinate $y_0 + \Delta y$ corrispondono con un ragionevole margine di approssimazione alle ordinate $f(x_0 + \Delta x)$ della funzione $y = f(x)$ da interpolare.

Per effettuare un'interpolazione quadratica occorre conoscere almeno tre punti della funzione da interpolare.

Nel caso banale in cui la funzione sia nota solamente in tre punti qualsiasi, i coefficienti della funzione interpolante $y = ax^2 + bx + c$ sono facilmente individuabili risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Qualora le ascisse dei tre punti noti siano fra loro equidistanti della quantità $k^{(39)}$, allora è possibile individuare una forma semplificata per la parabola interpolante, che consente di operare l'interpolazione in maniera diretta. Fissiamo a tale riguardo una funzione $P_2(x)$ che abbia la seguente forma:

$$P_2(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1)$$

Nella quale i coefficienti a, b, c sono scelti in modo tale che $P_2(x_j) = f(x_j)$ con $j = 0, 1, 2$. Quindi:

$$P_2(x_0) = a = f(x_0)$$

$$P_2(x_1) = a + bk = f(x_1) \quad \rightarrow \quad b = \frac{f(x_1) - a}{k} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{k} = \frac{\Delta f}{k}$$

$$P_2(x_2) = a + 2bk + 2ck^2 = f(x_2) \quad \rightarrow \quad c = \frac{[f(x_2) - 2bk - a]}{2k^2} = \frac{[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)]}{2k^2} = \frac{[f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_1) - f(x_0)]}{2k^2} = \frac{\Delta' f}{2k^2}$$

Noti i coefficienti a, b, c , si ottiene così la formula dell'interpolazione quadratica che consente di individuare l'ordinata interpolata in funzione dell'ascissa $x_0 + \Delta x$, con $\Delta x = \alpha k$.

$$f(x_0 + \alpha k) = f(x_0) + \alpha \cdot \Delta f + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \Delta' f$$

³⁹ Cioè $(x_0 - x_{-1}) = (x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = \dots = k$

Se poniamo: $Q = \frac{\Delta'f}{2} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2}$; $L = \Delta f - Q = y_1 - y_0 - Q$; $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

considerando che $\alpha = \frac{\Delta x}{k} = \frac{\Delta x}{x_1 - x_0}$, l'equazione interpolante può allora essere scritta: $\Delta y = \frac{\Delta x}{x_1 - x_0} L + \left(\frac{\Delta x}{x_1 - x_0} \right)^2 Q$

Questa formula, com'è facile vedere, si presta ad una soluzione tabellare, come pure si presta bene alla sua risoluzione con il regolo ⁽⁴⁰⁾: a tale riguardo è sufficiente impostare sulla scala Y il valore di $\frac{\Delta x}{x_1 - x_0}$ e, collocata l'origine più opportuna della scala y in opposizione a tale valore, si legge il valore del termine

lineare $\frac{\Delta x}{x_1 - x_0} L$ sulla scala Y in corrispondenza di L e il valore del termine quadratico $\left(\frac{\Delta x}{x_1 - x_0} \right)^2 Q$ sulla scala Y² in corrispondenza del valore Q sulla scala y².

Esempio 1. Sia $y = e^x$ la funzione da interpolare, della quale siano noti i suoi valori a partire da $x = 2.30$ con intervalli costanti pari a **0.01**. Si cerca y per $x = 2.314$

È dunque: $\frac{\Delta x}{x_1 - x_0} = \frac{0.004}{0.01} = 0.4$

Indice	x	y	Δf	$\Delta'f$	Q	L
-1	2.30	9.974182				
			0.100243			
0	2.31	10.074425	0.101249	0.001006		
				0.001019	0.0005095	0.1007395
1	2.32	10.175674	0.102268			
2	2.33	10.277942				

Troviamo $e^{2.315} \approx 10.074425 + 0.4 \cdot 0.1007395 + 0.4^2 \cdot 0.0005095 = 10.074425 + 0.0402958 + 0.0000815 = 10.1148023$,

che ben approssima il valore reale $e^{2.315} = 10.1148031$.

[Y] .4 / [y] 0.1 ; [y] 0.101 → [Y] .403 ; [y²] .5095 → [Y²] .815

⁴⁰ L'interpolazione quadratica richiede normalmente ordini di precisione che vanno oltre le possibilità di un normale regolo calcolatore. Il suo uso, in ogni caso, può ottimamente fornire una verifica ragionevolmente approssimata del risultato esatto.

Esempio 2. Sia $y = \ln(x)$, la funzione da interpolare, della quale siano noti i suoi valori a partire da $x = 10.0$ con intervalli pari a 0.1 . Si cerca y per $x = 10.17$

Indice	x	y	Δf	$\Delta'f$	Q	L
-1	10.0	2.302585				
			0.009950			
0	10.1	2.312535		-0.000097		
			0.009853			0.0099015
1	10.2	2.322388		-0.000097	-0.0000485	
			0.009756			
2	10.3	2.332144				

Troviamo $\ln(10.17) \approx 2.312535 + 0.7 \cdot 0.0099015 + 0.7^2 \cdot (-0.0000485) = 2.312535 + 0.0069311 - 0.0000238 = 2.3194423$,

che ben approssima il valore reale $\ln(10.17) = 2.3194422$.

$[Y] .7 / [y] 1 ; [y] .99 \rightarrow [Y] .693 ; [y^2] .485 \rightarrow [Y^2] .2375$

Qualora siano noti più di tre punti, è possibile affinare ulteriormente la stima, operando la media fra le due parabole interpolanti che hanno in comune i due punti x_0 , x_1 che delimitano l'intervallo all'interno del quale cade il valore da interpolare, rispettivamente passanti per il punto immediatamente a destra $f(x_2)$ e immediatamente a sinistra $f(x_{-1})$ dell'intervallo di calcolo.

Se infatti sono noti i valori della funzione $y = f(x)$ in corrispondenza dei punti x_{-1} , x_0 , x_1 , x_2 , potremo scrivere l'equazione delle parabole interpolanti:

$f(x) \approx P_2(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1)$ passante per i punti $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$

$f(x) \approx P_1(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1)$ passante per i punti $f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$

Nel tratto oggetto di interpolazione, potremo fare allora riferimento alla parabola media fra le due individuate: essa avrà coefficienti pari alla media dei coefficienti delle due parabole, quindi avremo a , b che restano immutati, mentre c diventa

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{[f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_1) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_{-1})]}{4k^2} = \frac{[f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_0) - f(x_{-1})]}{4k^2} = \frac{\Delta'f_{med}}{2k^2}$$

L'equazione interpolante rimane la medesima già vista, a condizione che ora si ponga

$$Q = \frac{\Delta'f_{med}}{2} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_0 - y_{-1})}{4}$$

Nel caso dell'esempio 1, troveremmo quindi:

Indice	x	y	Δf	$\Delta'f$	$\Delta'f_{med}$	Q	L
-1	2.30	9.974182					
			0.100243				
0	2.31	10.074425		0.001006			
			0.101249		0.0010125	0.0005063	0.1007427
1	2.32	10.175674		0.001019			
			0.102268				
2	2.33	10.277942					

$$e^{2.315} \approx 10.074425 + 0.4 \cdot 0.1007427 + 0.4^2 \cdot 0.0005063 = 1148031, \text{ che coincide con il valore reale.}$$

Nel caso dell'esempio 2 è invece evidente che la maggiore precisione fornita dalla parabola interpolante media è superflua, dal momento che i differenziali $\Delta'f$ sono costanti.

Risolvendo per Δx l'equazione interpolante $\Delta y = \frac{\Delta x}{x_1 - x_0} L + \left(\frac{\Delta x}{x_1 - x_0} \right)^2 Q$, troviamo $\Delta x = \left(\sqrt{1 + 4\Delta y \frac{Q}{L^2}} - 1 \right) \cdot (x_1 - x_0) \cdot \frac{L}{2Q}$

che è l'equazione che esprime l'interpolazione inversa.

Se il valore della radice è prossimo a 1, con le scale pitagoriche del regolo non è possibile calcolarlo con precisione, pertanto conviene utilizzare la seguente espressione semplificata, posto $t = \Delta y \frac{Q}{L^2}$:

$$\Delta x = (1 - t + 2t^2 - 5t^3 + 14t^4 - 42t^5 + 132t^6 - 429t^7 + 1430t^8 - \dots) \cdot (x_1 - x_0) \cdot \frac{\Delta y}{L}$$

nella maggioranza dei casi, è lecito arrestare la serie ai primi due termini, quindi:

$$\Delta x = (1 - t) \cdot (x_1 - x_0) \cdot \frac{\Delta y}{L}$$

Esempio 3. Con i dati dell'esempio 1, si voglia calcolare il valore dell'ascissa x per y = 10.12.

$$\Delta y = 10.12 - 10.074425 = 0.045575; \quad Q = \frac{\Delta' f_{med}}{2} = \frac{0.0010125}{2} = 0.00050625$$

$$L = \Delta f - Q = y_1 - y_0 - Q = 0.101249 - 0.00050625 = 0.10074275$$

$$t = \Delta y \frac{Q}{L^2} = 0.045575 \cdot \frac{0.00050625}{0.10074275^2} = 0.00227334$$

quindi, utilizzando lo sviluppo in serie arrestato ai primi due termini,

$$\Delta x = (1 - 0.00227334) \cdot 0.01 \cdot \frac{0.045575}{0.10074275} = 0.0045136, \text{ quindi } x = 2.3145136^{(41)}$$

Esempio 4. Con i dati dell'esempio 2, si voglia calcolare il valore dell'ascissa x per y = 2.317

$$\Delta y = 2.317 - 2.312535 = 0.004465; \quad Q = \frac{\Delta' f_{med}}{2} = \frac{-0.000097}{2} = -0.0000485$$

$$L = \Delta f - Q = y_1 - y_0 - Q = 0.009853 + 0.0000485 = 0.0099015$$

$$t = \Delta y \frac{Q}{L^2} = 0.004465 \cdot \frac{-0.0000485}{0.0099015^2} = -0.0022088$$

quindi, utilizzando lo sviluppo in serie arrestato ai primi due termini,

$$\Delta x = (1 + 0.0022088) \cdot 0.1 \cdot \frac{0.004465}{0.0099015} = 0.04519378, \text{ quindi } x = 10.14519378^{(42)}$$

⁴¹ Il valore esatto è x = 2.3145137

⁴² Il valore esatto è x = 10.1451930

Radici reali dell'equazione di secondo grado $x^2 + ax + b = 0$:

Le radici reali dell'equazione di secondo grado ⁽⁴³⁾ $x^2 + ax + b = 0$ corrispondono all'ascissa dei punti di intersezione fra la parabola unitaria $y_1 = x^2$ e la retta $y_2 = -ax - b$.

Disegnando dunque le due funzioni sullo stesso grafico, la stima dell'ascissa dei punti intersezione ⁽⁴⁴⁾ servirà per il successivo affinamento del risultato con l'uso del regolo. A tal fine, scriviamo l'equazione della parabola nella forma

$$x + \frac{b}{x} = -a$$

più funzionale all'uso del regolo e osserviamo che le radici x_1 e x_2 che cerchiamo obbediscono alla Legge di Viète, in accordo alla quale $x_1 + x_2 = -a$

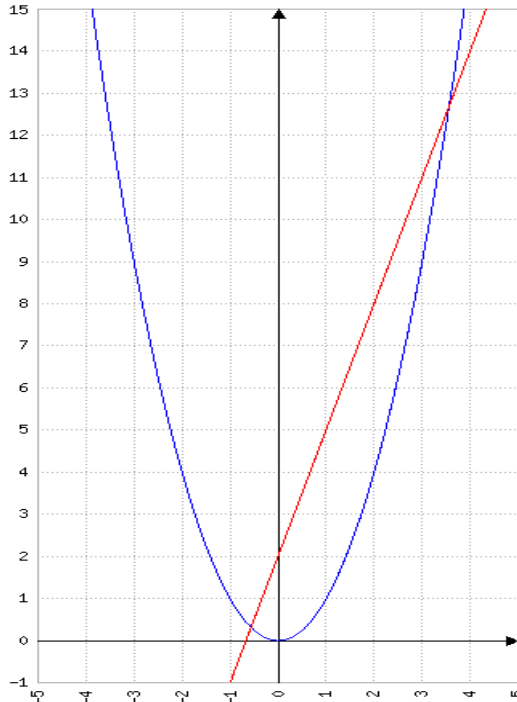
Collocando l'origine dello scorrevole su **b** della scala **Y**, qualsiasi valore **x** letto sulla scala **Y** sarà direttamente associato al corrispondente valore **b/x** sulla scala **1/y**. Fra le infinite coppie di valori messi così in relazione, basterà trovare, aiutandosi con la linea di fede del cursore, la coppia di valori x_1 sulla scala **Y** e $x_2 (= b/x_1)$ sulla scala **1/y** la cui somma è pari a **-a**.

Esempio: $x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2/x = 3$

Dal diagramma, si stimano $x_1 = 3.5$ e $x_2 = -0.5$ poi, col metodo visto, con il regolo si trovano le radici effettive, che valgono: $x_1 = 3.56$; $x_2 = -0.56$ ⁽⁴⁵⁾

Se la retta y_2 non interseca la parabola y_1 , le radici sono complesse coniugate e, in tal caso, si utilizzerà la formula generale di risoluzione:

$$x_1, x_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$$



⁴³ Per una completa trattazione del metodo di risoluzione di equazioni di secondo grado con l'uso del regolo calcolatore, si rimanda all'approfondimento in italiano del testo del prof. Diego Velasquez Gomez "Ecuaciones de segundo y tercer grado", a cura di Alessandro Manni, scaricabile dal sito <http://www.reglasdecalculo.com/bibliografia.htm>

⁴⁴ La retta interseca l'asse delle ascisse per $x = -b/a$ e l'asse delle ordinate per $y = -b$

⁴⁵ Impostare l'origine della scala **y** su 2 della scala **Y** (**[Y] .2 / [y] 0.1**), quindi cercare con la linea di fede del cursore una posizione tale per cui la somma algebrica (avendo le due radici segno discorde, ciò equivale a fare la differenza fra i valori assoluti) delle letture effettuate sulla scala **Y** e sulla scala **1/y** dia il valore $-a = 3$. Tale condizione è verificata per **[Y] -0.56**, in corrispondenza del quale possiamo leggere **[1/y] 3.56**. Prescindendo dal diagramma di stima, è evidente che le soluzioni non possono avere segno invertito, perché, in tale caso, la loro differenza varrebbe -3 e, conseguentemente, dovrebbe essere $-a = -3$.

soluzione goniometrica di equazioni quadratiche

Le equazioni quadratiche appena viste possono essere risolte anche per via goniometrica, facendo riferimento alle relazioni riportate a pag. 60.

A questo riguardo, si adottano le seguenti posizioni:

$$1) \quad x^2 \pm 2ax - b^2 = 0 \quad \text{Porre } \frac{b}{a} = \tan 2\varphi \text{ e cercare } x_1 = \pm b \tan \varphi, \quad x_2 = \mp b \cot \varphi$$

$$2) \quad x^2 \mp 2ax + b^2 = 0, \text{ quando } b < a \quad \text{Porre } \frac{b}{a} = \sin 2\varphi \text{ e cercare } x_1 = \mp b \tan \varphi, \quad x_2 = \mp b \cot \varphi$$

Esempi:

$$x^2 + 234x - 5670 = 0 \rightarrow a = 117, \quad b = 75.3, \quad x_1 = 22.1, \quad x_2 = -256.1$$

$$[Y] 75.3 / [Y] 1.17 ; [Y] 1 \rightarrow [\tan X^\circ] 36.36^\circ \rightarrow \varphi = 36.36^\circ / 2 = 18.18^\circ$$

$$[Y] 1 / [Y] 75.3 ; [\tan X^\circ] 18.18 \rightarrow [Y] 22.1 ; [Y] 75.3 / [Y] 1 ; [\tan X^\circ] 18.18 \rightarrow [1/Y] 256.1$$

$$x^2 + 234x + 5670 = 0 \rightarrow a = 117, \quad b = 75.3, \quad x_1 = -27.4, \quad x_2 = -206.5$$

$$[Y] 75.3 / [Y] 1.17 ; [Y] 1 \rightarrow [\sin X^\circ] 44.4 \rightarrow \varphi = 22.2^\circ$$

$$[Y] 1 / [Y] 75.3 ; [\tan X^\circ] 22.2 \rightarrow [Y] 27.4 ; [Y] 75.3 / [Y] 1 ; [\tan X^\circ] 22.2 \rightarrow [1/Y] 206.5$$

Radici dell'equazione cubica ridotta $x^3 + ax + b = 0$:

Le radici dell'equazione cubica ridotta⁽⁴⁶⁾ $x^3 + ax + b = 0$ si ottengono in numeri reali dalle ascisse dei punti di intersezione della parabola cubica unitaria $y_1 = x^3$ con la retta $y_2 = -ax - b$.

Come già visto per le equazioni quadratiche, disegnando le due funzioni sullo stesso grafico, la stima dell'ascissa dei punti intersezione⁽⁴⁷⁾ servirà per il successivo affinamento del risultato con l'uso del regolo. A tal fine, l'equazione sopraindicata si converte nella seguente forma, più appropriata all'uso del regolo:

$$x^2 + \frac{b}{x} = -a$$

Ponendo una delle origini della scala principale dello scorrevole in corrispondenza di **b** sulla scala Y, ad ogni valore x_n^2 sulla scala fissa parabolica Y^2 corrisponde il valore **b/x_n** sulla scala 1/y:

$\sqrt{X}$	x_1^2	Y^2
$\frac{1}{y}$	$\frac{b}{x_1}$	1/y
y	1	y
Y	b x_1	Y

Fra le infinite coppie di valori così individuate, ve ne sarà almeno una tale per cui la somma dei due valori soddisfa la relazione vista prima, cioè vale **-a**. In corrispondenza di questa coppia, si leggerà sulla scala principale Y il valore della radice cercata. Si giunge facilmente ad individuare il risultato partendo dalla stima preventivamente fatta a livello grafico. Nota una radice, le restanti due possono anche essere trovate con la formula:

$$x_2, x_3 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{3x_1^2}{4}}$$

⁴⁶ Per una completa trattazione del metodo di risoluzione di equazioni di terzo grado con l'uso del regolo calcolatore, si rimanda all'approfondimento in italiano del testo del prof. Diego Velasquez Gomez "Ecuaciones de segundo y tercer grado", a cura di Alessandro Manni, scaricabile dal sito <http://www.reglasdecalculo.com/bibliografia.htm>

⁴⁷ La retta interseca l'asse delle ascisse per $x = -b/a$ e l'asse delle ordinate per $y = -b$

che torna particolarmente utile in presenza di radici complesse coniugate. Se sono note due radici reali dell'equazione, la terza, per forza anch'essa reale, si può calcolare con la Legge di Viète uguagliando la somma delle tre radici al coefficiente del termine quadratico dell'equazione, cambiato di segno, che nel nostro caso è nullo, trattandosi di equazione cubica ridotta.

Esempio: $x^3 + 3.6x + 3 = 0$

Dal grafico si stima che la soluzione reale è ≈ -0.7

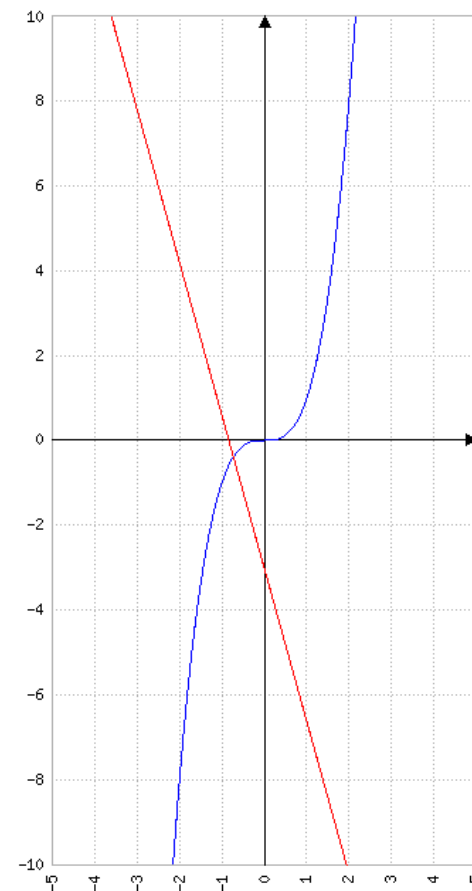
Poichè la radice da affinare è negativa, dovremo trovare due numeri sulle scale $1/y$ e Y^2 in corrispondenza di un numero prossimo a 0.7 sulla scala Y, tali che il valore assoluto della loro differenza sia pari a 3.6.

Si opera quindi la seguente impostazione:

$[Y] .3 / [y] 0.1 ; [1/y] 4.13 / [Y^2] 0.53$ ($4.13 - 0.53 = 3.6$) $\rightarrow [Y] 0.726$

Noto il valore di $x_1 = -0.726$, troviamo le due radici complesse coniugate con la formula vista prima:

$$x_2, x_3 = \frac{0.726}{2} \pm \sqrt{-3.6 - \frac{3 \times 0.726^2}{4}} = 0.363 \pm 2i$$



Esempio: $x^3 - 4x + 2 = 0$

Dal grafico si stima che la prima soluzione reale è ≈ -2.2

Poichè la radice da affinare è negativa, dovremo trovare due numeri sulle scale $1/y$ e Y^2 in corrispondenza di un numero prossimo a 2.2 sulla scala Y, tali che la loro differenza sia in valore assoluto pari a 4.

Si opera quindi la seguente impostazione:

[Y] .2 / [y] 0.1 ; [1/y] 9.1 / [Y²] 4.91 (4.91 - 0.91 = 4.0) → [Y] 0.222

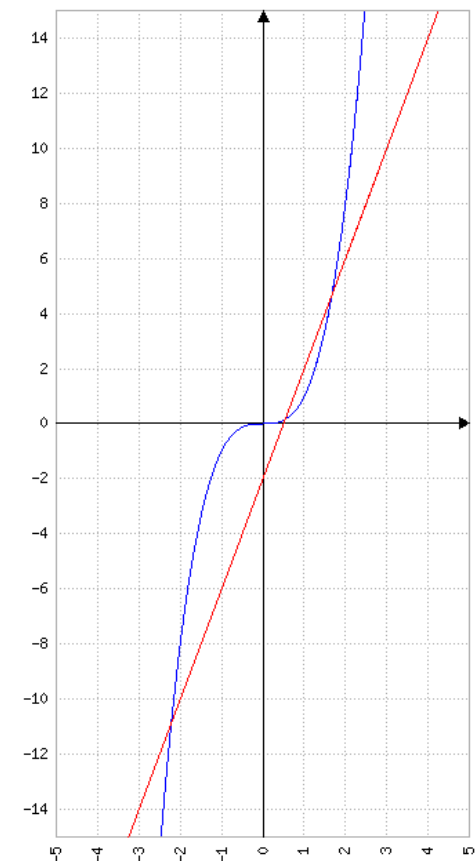
Noto il valore di $x_1 = -2.22$, troviamo le due restanti radici con la formula vista prima:

$$x_2 = \frac{2.22}{2} + \sqrt{4 - \frac{3 \times 2.22^2}{4}} = 1.66$$

$$x_3 = \frac{2.22}{2} - \sqrt{4 - \frac{3 \times 2.22^2}{4}} = 0.56$$

Oppure, note x_1 e x_2 , troviamo x_3 con la formula di Viète:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \text{ quindi } x_3 = -1.66 + 2.2 = 0.54$$



E' comunque possibile trovare le restanti radici anche reiterando il calcolo effettuato col regolo per la ricerca della prima radice. Poichè in questo caso le radici da affinare sono positive, dovremo trovare due coppie di numeri sulle scale $1/y$ e Y^2 in corrispondenza di due numeri prossimi a 0.5 e 1.7 sulla scala Y, tali che la loro somma sia pari a 4.

[Y] .2 / [y] 0.1 ; [1/y] 3.71 / [Y²] .29 (3.71 + 0.29 = 4.0) → [Y] 0.54

[Y] 2 / [y] 0.1 // [1/y] 12 / [Y²] .28 (1.20 + 2.80 = 4.0) → [Y] 1.67

Algoritmo di Horner:

Data una funzione $f(x)$ del tipo $b_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_0$

L'algoritmo di Horner è utile per calcolare, in corrispondenza di un determinato valore della variabile x , il valore della funzione e delle sue derivate. Inoltre si presta a calcolare i coefficienti delle corrispondenti equazioni ridotte, laddove ciò risulti possibile.

A tal fine, si imposta una tabella scrivendo sulla prima riga i coefficienti a_n in successione e completando lo schema passo passo come indicato nel seguito, ponendo:

$$b_n = a_n, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x, \quad b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-1} x, \quad \text{etc.}$$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
		$+b_4 x$	$+b_3 x$	$+b_2 x$	$+b_1 x$
	b_4	b_3	b_2	b_1	$b_0 = f(x) / 0!$
x		$+c_4 x$	$+c_3 x$	$+c_2 x$	
	c_4	c_3	c_2	$c_1 = f'(x) / 1!$	
		$+d_4 x$	$+d_3 x$		
	d_4	d_3	$d_2 = f''(x) / 2!$		

Reiterando l'applicazione, si trovano i valori

$$b_0 = \frac{f(x)}{0!}, \quad c_1 = \frac{f'(x)}{1!}, \quad d_2 = \frac{f''(x)}{2!}, \quad \dots \quad e_n = \frac{f^n(x)}{n!} \quad \text{in corrispondenza del valore prefissato di } x$$

Si colloca uno dei tratti estremi dello scorrevole sul valore di x sulla scala **Y**. La linea di fede del cursore si pone quindi su **b_n** , **c_n** e **d_n** della scala y e si leggono i relativi prodotti sulla scala **Y**.

Esempio:

l'equazione cubica $x^3 - 15.4 x^2 + 82.65 x - 150.7 = 0$

è liberata del suo termine quadratico operando la trasformazione $x = y + \frac{15.4}{3}$

I coefficienti dell'equazione ridotta possono allora essere determinati con l'algoritmo di Horner calcolando il valore che assume l'equazione data in corrispondenza di $x = 15.4/3 = 5.1333$, reiterando due volte il procedimento.

Opponendo **3** sulla scala **y** a **154** sulla scala **Y** impostiamo il regolo per effettuare le moltiplicazioni per il parametro $x = 5.1333$ e possiamo scrivere:

	1	- 15.400	+ 82.65	- 150.7
		+ 5.133	- 52.70	+153.7
$\frac{15.4}{3} = 5.133$	1	- 10.267	+ 29.95	+ 3.0
		+ 5.133	- 26.35	
	1	- 5.133	+ 3.60	

Come si può vedere, un ulteriore passaggio è superfluo, dal momento che appare subito evidente che il secondo termine dell'equazione scomparirà.

L'equazione si riduce quindi a:

$$y^3 + 3.6 y + 3 = 0$$

Esempio: calcolare il valore di $f(x) = 2x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x + 12$ e delle sue derivate per $x = 5$

	2	- 4	- 3	- 6	1	12	
		10	30	135	645	3230	
	2	6	27	129	646	3242	$= \frac{f(5)}{0!} \rightarrow f(5) = 3242$
		10	80	535	3320		
	2	16	107	664	3966		$= \frac{f'(5)}{1!} \rightarrow f'(5) = 3966$
		10	130	1185			
5	2	26	237	1849			$= \frac{f''(5)}{2!} \rightarrow f''(5) = 1849 \times 2! = 3698$
		10	180				
	2	36	417				$= \frac{f'''(5)}{3!} \rightarrow f'''(5) = 417 \times 3! = 2502$
		10					
	2	46					$= \frac{f^{IV}(5)}{4!} \rightarrow f^{IV}(5) = 46 \times 4! = 1104$
							$f^V(x) = 2 \times 5! = 240$

per $x = -2$

	2	- 4	- 3	- 6	1	12	
		- 4	16	- 26	64	-130	
	2	- 8	13	- 32	65	-118	$f(-2) = -118$
		-4	24	-74	212		
	2	-12	37	-106	277		$f'(-2) = 277$
		-4	32	-138			
- 2	2	-16	69	-244			$f''(-2) = -244 \times 2! = -488$
		-4	40				
	2	-20	109				$f'''(-2) = 109 \times 3! = 654$
		-4					
	2	-24					$f^{IV}(-2) = -24 \times 4! = -576$

per x = - 0.5

- 0.5	2	- 4	- 3	- 6	1	12
		- 1	2.5	0.25	2.875	- 1.9375
	2	-5	- 0.5	-5.75	3.875	10.0625
		- 1	3.0	- 1.25	3.500	
	2	- 6	2.5	- 7.00	7.375	
		- 1	3.5	- 3.00		
	2	-7	6.0	- 10.00		
		- 1	4.0			
	2	- 8	10.0			
		- 1				
	2	- 9				

f(-0.5) = 10.0625

f'(-0.5) = 7.3750

f''(-0.5) = -10 x 2! = - 20

f''' (-0.5) = 10 x 3! = 60

f^{IV} (-0.5) = -9 x 4! = - 216

FORMULARIO

Coefficienti binomiali: $\binom{\alpha}{n} = \frac{D_{\alpha,n}}{n!} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$

Fattoriali: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n$

$2n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 2n$

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n-1)$

Numeri di Bernoulli:

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$-\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$	$\frac{854513}{138}$	$-\frac{236364091}{2730}$	$\frac{854513}{138}$

<i>Funzioni trigonometriche</i>	<i>Funzioni iperboliche</i>	<i>Funzioni trigonometriche inverse</i>	<i>Funzioni iperboliche inverse</i>
	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$	$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$		$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$	$\operatorname{arccotg} x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$	$\operatorname{arccotgh} x = \operatorname{arctgh}\left(\frac{1}{x}\right)$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$	$\operatorname{arcsech} x = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{x}\right)$
$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$\operatorname{arccosec} x = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\operatorname{arccosech} x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$

Relazioni fra funzioni iperboliche / trigonometriche con argomento singolo, doppio o dimezzato

$\sin \varphi$ $\sinh \varphi$	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} \pm 1}}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp z}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 \pm z^2}}}{2}}$
$\cos \varphi$ $\cosh \varphi$	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm z^2}}$	$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{1 + z}{2}}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 \pm z^2}}}$
$\tan \varphi$ $\tanh \varphi$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} \mp 1}}$	$\sqrt{\pm \frac{1}{z^2} \mp 1}$	z	$\frac{z}{1 + \sqrt{1 \mp z^2}} = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{z}$	$\sqrt{\frac{\pm 1 \mp z}{1 + z}}$	$\frac{\mp 1 \pm \sqrt{1 \pm z^2}}{z} = \frac{z}{1 + \sqrt{1 \pm z^2}}$
$\sin 2\varphi$ $\sinh 2\varphi$	$2z\sqrt{1 \mp z^2}$	$2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$\frac{2z}{1 \pm z^2}$	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} \pm 1}}$
$\cos 2\varphi$ $\cosh 2\varphi$	$1 \mp 2z^2$	$2z^2 - 1$	$\frac{1 \mp z^2}{1 \pm z^2}$	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm z^2}}$
$\tan 2\varphi$ $\tanh 2\varphi$	$\frac{2z\sqrt{1 \mp z^2}}{1 \mp 2z^2}$	$\frac{2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}}{2z^2 - 1}$	$\frac{2z}{1 \mp z^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} \mp 1}}$	$\sqrt{\pm \frac{1}{z^2} \mp 1}$	z

Ove compare il doppio segno, quello superiore si riferisce alla funzione trigonometrica, quello inferiore a quella iperbolica.

Le funzioni date in funzione di z per argomento singolo, doppio o dimezzato sono valide se riferite al valore z della funzione dell'argomento singolo nella colonna cui ci si riferisce ⁽⁴⁸⁾. A sua volta, z può essere il risultato di un'espressione come ad es. a/b oppure $\sqrt{a/b}$.

La relazione tra la funzione con argomento singolo, doppio o dimezzato e la funzione iniziale della medesima colonna con argomento singolo è ottenuta sostituendo a z la funzione iniziale. L'espressione può essere semplificata molto agevolmente se ci si riferisce al solo argomento doppio o dimezzato rispetto al valore iniziale e non alla specifica funzione di questi argomenti.

⁴⁸ Ad esempio, l'espressione $2z^2 - 1$ della quinta riga della seconda colonna esprime effettivamente $\cos 2\varphi$ (ovvero $\cosh 2\varphi$) se si pone $z = \cos \varphi$, che è la funzione di riferimento per la seconda colonna.

Serie di Potenze delle funzioni elementari del Regolo Calcolatore Mathema

$\sqrt{1+x} =$	$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} =$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{25.6} + \frac{x^5}{36.57} - \frac{x^6}{48.76} + \dots$	$ x < 1$
$\sqrt{x \pm 1} =$	$\sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{0.5}{n} x^n =$	$\sqrt{x} \left(1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{25.6} \pm \frac{x^5}{36.57} - \frac{x^6}{48.76} + \dots \right)$	$ x > 1$
$e^x =$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} \dots$	$ x < \infty$
$\ln(1+x) =$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} \dots$	$ x < 1$
$\sin x$ $\sinh x =$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$	$x \mp \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \mp \frac{x^{11}}{39916800} \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$ $\cosh x =$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n x^{2n}}{(2n)!} =$	$x \mp \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \mp \frac{x^{10}}{3628800} \dots$	$ x < \infty$
$\tan x$ $\tanh x =$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^{n-1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} =$	$x \pm \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{7.5} \pm \frac{x^7}{18.53} + \frac{x^9}{45.73} \pm \frac{x^{11}}{112.83} \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$ $\coth x =$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (\mp 1)^n \frac{2^{2n} B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} =$	$\frac{1}{x} \mp \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} \mp \frac{x^5}{472.5} - \frac{x^7}{4725} \mp \frac{x^9}{46777.5} \dots$	$ x < \pi$
$\arcsin x$ $\operatorname{arcsinh} x =$	$x + \sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^n \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)} =$	$x \pm \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{13.33} \pm \frac{x^7}{22.4} + \frac{x^9}{32.91} \pm \frac{x^{11}}{44.70} \dots$	$ x < 1$
$\arccos x =$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x =$	$\frac{\pi}{2} - x \pm \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{13.33} \pm \frac{x^7}{22.4} + \frac{x^9}{32.91} \pm \frac{x^{11}}{44.70} \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{arcosh} x =$	$\ln 2x - \sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^n \frac{(2n)! x^{-2n}}{2^{2n} (2n)(n!)^2} =$	$\ln 2x - \frac{x^{-2}}{4} - \frac{x^{-4}}{10.67} - \frac{x^{-6}}{19.2} - \frac{x^{-8}}{29.26} \dots$	$ x > 1$
$\arctan x$ $\operatorname{arctanh} x =$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (\mp 1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$	$x \mp \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \mp \frac{x^{15}}{15} \dots$	$ x < 1$

Nel caso di argomenti piccoli o grandi, a seconda dei casi, la limitazione ai primi termini degli sviluppi in serie fornisce un'accettabile approssimazione delle formule.

Derivate $f'(x)$ e Integrali Indefiniti $\int f(x)dx$ delle funzioni elementari del Regolo Calcolatore Mathema

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
mx^{m-1}	x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arccos x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$-\operatorname{cosec}^2 x$	$\cotg x$	$\ln \sin x + C$
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\sec x$	$\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$
$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cosec} x$	$-\ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} + C = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg} x$	$x \operatorname{arccotg} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x$	$\ln \cosh x + C$
$-\operatorname{cosech}^2 x$	$\cotgh x$	$\ln \sinh x + C$
$-\frac{\sin x}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{sech} x$	$2 \arctan(e^x) + C = \arctan(\sinh x) + C = \arcsin(\tanh x) + C$
$-\frac{\cos x}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{cosech} x$	$-\ln \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}} + C = \ln \tanh \frac{x}{2} + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{1+x^2} + C$
$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x$	$x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x$	$x \operatorname{arctanh} x + \ln \sqrt{1-x^2} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arccotgh} x$	$x \operatorname{arccotgh} x + \ln \sqrt{x^2-1} + C$