

QA
219
B3

Biblioteca tecnológica

UC-NRLF



QB 543 473

Fernando Baró

NOCIONES
de
NOMOGRAFÍA

Adrian ROMO, Editor

GIFT OF
J.C.CEBRIAN



EX LIBRIS

NOCIONES DE NOMOGRAFIA

BIBLIOTECA TECNOLÓGICA

	<u>Pesetas.</u>
Baltá de Cela. —Análisis y ensayos químicos industriales.	17
López Caja. —Topografía práctica.	15
Miracle. —Industria harinera.	8
» Fabricación de pan.	7
Oyarzábal. —Enfermedades de la piel, venéreas y sifilíticas.	16
Rio Joan. —Aerostación moderna.	8
» Electrometría práctica.	16
Torner. —Mecánica racional.	25
Winter. —Los factores del rendimiento industrial.	9
Pérez Muñoz. —Cálculo infinitesimal.	16
Sánchez de Rivera. —Análisis de orinas.	8
Giral. —Ración alimenticia.	7
Baró. —Nociones de Nomografía.	10

HUELIN.—Diccionario técnico en cuatro idiomas.

- TOMO I.—Inglés-español-alemán-francés.
- » II.—Alemán-inglés-francés-español.
- » IV.—Español-francés-inglés-alemán.

En prensa

TOMO III.—Francés-alemán-español-inglés.

Volúmenes de más de 700 páginas a 15 pesetas.

BIBLIOTECA TECNOLÓGICA

NOCIONES
DE
NOMOGRAMA

POR

D. FERNANDO BARÓ
"

Ingeniero de Montes y Profesor de la Escuela especial del Ramo.



LIBRARY OF
CONGRESS

MADRID
LIBRERÍA INTERNACIONAL
ADRIÁN ROMO

5, Alcalá, 5

1917

C.F. 219
153

ES PROPIEDAD

LIBRERIA

de venta
encuadernado

8.131.—Tipolit. L. Faure, Alonso Cano, 15 y 17. —Madrid.

NOCIONES DE NOMOGRAFÍA

AL LECTOR

Los vuelos que hace pocos años ha tomado el cálculo por medio de tablas gráficas, la indiscutible utilidad de las mismas para el manejo de las fórmulas que en la práctica se presentan constantemente al Ingeniero, y el haberse constituido un cuerpo de doctrina dentro de las Matemáticas aplicadas, con los métodos de construcción de los modernos *ábacos* y *nomogramas*, han sido causa, sin duda, de que aparezca la Nomografía en los programas de algunas Escuelas de Ingenieros y Academias militares, así como de que en España hayan visto ya luz varios trabajos de esta índole (1) e indiscutible

(1) Entre otros citaremos la *Nomografía balística* del general Ollero (1903), los *Nomogramas del Ingeniero* y la *Nomografía* de D. R. Seco de la Garza (1907 y 1910) y los *Elementos de Nomografía* de D. Nicomedes Alcayde (1915).

mérito, encaminados unos a facilitar su gestión al técnico ya hecho, y otros, al fin docente de preparación de nuestros alumnos, ya que han de encontrar en su carrera numerosas traducciones nomográficas de las fórmulas usuales en muchos de los libros de texto que han de servirles luego de guía para el desempeño de la profesión.

Prescindiendo aquí de las razones que pueden aducirse para dar éste o el otro puesto a la Nomografía dentro del estudio de las ciencias exactas, es lo cierto que, si bien la Geometría analítica no se ocupa de *resolver*, sino de *representar* las ecuaciones, es de toda la Matemática aquélla que mejor puede servir de prólogo y de base a la inteligencia de los procedimientos nomográficos. Y no siendo ajenos nosotros a la introducción de tan útil rama de la ciencia en los estudios del Ingeniero, hemos creído un deber facilitar a cuantos deseen iniciarse en ella unas primeras *nociones*, escritas con vista a los principales problemas de Ingeniería general y ciencias auxiliares, que a su vez pueden ser útiles más adelante para comprender las ventajas prácticas de construir ábacos para fórmulas cuyo cálculo hace perder un tiempo precioso, así como para estar en condiciones de entender los nomogramas que hoy aparecen en casi todas las obras más o menos especiales de la profesión de Ingeniero.

He aquí el objeto del modesto trabajo que ofrecemos, en primer término, a los alumnos y candidatos a ingreso de las Escuelas especiales, y a la juventud estudianta en general, que quiera orientarse para estudios más serios y profundos en la materia, y cuyo alcance no pretendemos sea otro que el de enseñar el manejo cons-

ciente de los nomogramas, razón por la cual nos ceñimos a lo indispensable de la teoría, extendiéndonos más en los ejemplos y cuestiones puramente de aplicación, sin perder de vista la claridad en el desarrollo de los métodos generales indispensables al fin didáctico de la obra.

Madrid 15 de marzo de 1916.

NOCIONES DE NOMOGRAFÍA

I.—PRELIMINARES

1.—Objeto y aplicaciones de la Nomografía.—La Nomografía (1) es un procedimiento de cálculo mediante el cual, dadas la relación o relaciones que ligan a dos o más variables, representa a éstas por sistemas de líneas o puntos *acotados*, y los sitúa después, generalmente sobre un plano, de tal modo, que por una construcción geométrica más o menos sencilla, puede venirse en conocimiento de los valores numéricos de las variables que *simultáneamente* satisfacen a la relación o relaciones propuestas.

Si las variables están unidas por una ley matemática, el *nomograma* traduce y resuelve la fórmula o ecuación expresiva de dicha ley: si están ligadas por una ley física deducida de la experiencia, la posición y forma de los elementos representativos de las variables, así como las construcciones necesarias para determinar cada serie de sus valores simultáneos, pueden en muchos casos

(1) Nombre empleado por M. D'Ocagne, distinguido matemático francés, y derivado de las palabras griegas νόμος (ley) y γράφω (escribo).

orientar ulteriores investigaciones y hasta traducir matemáticamente las relaciones que guardan entre sí.

La Nomografía toma de la *Geometría analítica* el *sistema representativo* de las variables, y se diferencia del *Cálculo gráfico* en que, así como éste se funda en la sustitución de los números por segmentos de rectas medidos con una cierta unidad, y en efectuar con estos segmentos las construcciones geométricas precisas para llegar a deducir el valor de las incógnitas, lo que implica la necesidad de *repetir* la construcción en cada caso particular, la Nomografía da *hechas*, por decirlo así, las operaciones al fijar la forma y posición relativa de los sistemas acotados, siendo sólo preciso para hallar el valor de las incógnitas en cada caso, bien una simple lectura, o bien el desplazamiento del sistema geométrico adoptado para relacionar los valores simultáneos de las variables, o de unos sistemas acotados con respecto a los demás.

Sea, por ejemplo, la ecuación de tres variables:

$$x + y + z = 0 \qquad [1]$$

La Geometría analítica nos dice que, sean cualesquiera los valores reales de x , y , z , dicha ecuación representa en el sistema cartesiano una superficie plana que pasa por el origen y corta a los planos coordenados según las bisectrices de los ángulos que formen entre sí los ejes X , Y , Z . Mas si, dadas dos coordenadas x_1 , y_1 de un punto M de ese plano, queremos hallar la coordenada z_1 que le corresponde, hemos de resolver numérica o gráficamente la ecuación [1]. Para ello el *Cálculo gráfico* elige una unidad lineal UL (fig. 1) y mide con ella los valores dados x_1 , y_1 , fija después un sentido para los signos en una recta indefinida AB , y, a partir de un punto O cualquiera, toma en el sentido de la flecha los

segmentos ox_1 , x_1y_1 , respectivamente iguales a las medidas de x_1 y_1 ; es claro que el segmento y_1o , tomado en el sentido BA y medido con la unidad UL, representará el valor numérico z_1 que satisface la ecuación propues-

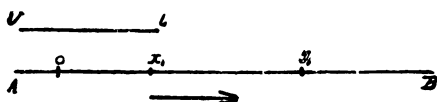


Fig 1.

ta. Fácilmente se ve la necesidad de repetir la construcción indicada para cada par de valores de x e y que se nos den.

Representemos, en cambio, por los medios que nos da la Geometría analítica, los valores enteros, verbi-gracia, de x , y , z (fig. 2), por el sistema de *puntos acotados* 1, 2, 3... que aparecen dispuestos sobre las líneas AB, CD y EF; si colocamos estas líneas o *escalas* de tal modo que una recta MN que corte a las escalas AB y CD representativas de las variables x e y en dos va-

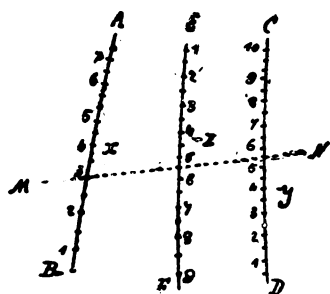


Fig. 2.

lores cualesquiera x_1 e y_1 de las mismas, corte *necesariamente* a la tercera escala EF en un valor ($-z_1$) tal, que se verifique

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

hablemos construído un nomograma de la ecuación [1] propuesta, en el que sólo tendremos que variar la posi-

ción de la recta MN para hallar en cualquier momento el valor numérico de la incógnita z correspondiente a los de x e y que se nos den. De modo análogo hubiéramos podido colocar las escalas x e y (fig. 3) en tal disposición que, haciendo resbalar la escala CD sobre la AB, hasta que un valor cualquiera y_1 de y , *coincida* con otro x_1 de x , el índice M señale *siempre* en la escala EF un valor ($-z_1$) de z tal, que se verifique

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0.$$

Déjanse ya ver las ventajas que sobre el cálculo gráfico tiene la Nomografía, y pueden comprenderse también las aplicaciones de que es susceptible sustituyendo

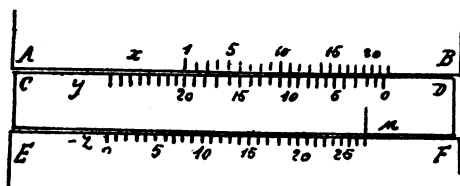


Fig. 3.

a las *tablas numéricas*, cuya construcción y manejo son mucho más pesados y expuestos a equivocaciones, pues si bien es verdad que en aquéllas puede llevarse la aproximación al grado que se desee, no es menos cierto que los nomogramas pueden también construirse con escalas cuya unidad gráfica sea lo bastante grande para permitir aproximación de 0,001, más que suficiente en la práctica, salvo problemas muy contados de Astronomía, Geodesia o Física matemática en que se emplean instrumentos de extrema precisión. La tabla numérica es, además, de manejo pesado desde que hay más de tres variables, y la interpolación requiere siempre un cálculo a veces nada expedito; en el nomograma la interpola-

ción es sencilla y rápida, aunque menos exacta, no obstante lo cual, aun en el caso más desfavorable, basta para las aplicaciones corrientes en Ingeniería, cuyas fórmulas vienen casi siempre influídas por coeficientes prácticos no siempre seguros. Es, pues, la Nomografía un medio de cálculo utilísimo para el Ingeniero, al que, por lo menos, siempre sirve de *orientación* en el problema práctico que se propone, dándole los valores enteros de la incógnita, y, si a esto se añade una gran elasticidad en los métodos, así como un gran ingenio y fuerza en sus procedimientos de investigación, puede asegurarse con Mr. D'Ocagne que es inmenso el horizonte abierto hoy ante esta ciencia e imposible prever sus futuras aplicaciones. La facilidad con que en cualquier momento y sin otros útiles que un compás, un doble decímetro y, a lo más, una regla o patrón logarítmico, pueden construirse nomogramas para el cálculo de las fórmulas más complicadas en apariencia, justifican por completo la necesidad de estos conocimientos para todo Ingeniero, y entre ellos el agrónomo y forestal, a quien puede ser particularmente interesante la investigación por este procedimiento de las leyes naturales que intente deducir de los resultados de la experimentación en el laboratorio o en el campo.

2.—Idea general sobre los sistemas acotados: ábacos y nomogramas.—Sea una cantidad α , que varía entre dos límites fijos a y b : podemos imaginar una serie de curvas tales que cada una corresponda a un valor determinado de α y trazar, por ejemplo, las que representen valores enteros, 1, 2, 3, *acotándolas* respectivamente con estos números. Si referimos esta serie de curvas a dos ejes coordenados cualesquiera X e Y, la ecuación de la *red* de curvas será:

$$f(xy\alpha) = 0 \quad (a)$$

Ahora bien, en vez de esta red (1), cada una de cuyas curvas tiene una *cota*, podremos a veces considerar una *curva única* definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = \varphi(\alpha) \end{cases} \quad (b)$$

cada uno de cuyos puntos esté *acotado* con los valores enteros 1, 2, 3 de α .

Consideremos ahora una serie de variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ y supongamos representada cada una por una red de curvas o por una curva acotada: podemos imaginar que si se dan valores fijos a $n - 1$ de las variables (lo que dará una curva o un punto en cada una de las $n - 1$ redes o $n - 1$ curvas), habrá siempre medio de deducir, por una construcción geométrica conocida, una curva o un punto de la n^a red o n^a curva del sistema: luego existe entre las n variables una relación

$$F(\alpha \beta \gamma \delta \dots) = 0 \quad [1]$$

y, recíprocamente, esta ecuación puede ser resuelta gráficamente por un sistema de redes (a) o de curvas acotadas (b), puesto que cuando se dan los valores de $n-1$ variables se deduce la n^a por una construcción geométrica conocida.

El conjunto de las n redes o de las n curvas acotadas, constituye un *ábaco* (2) o *nomograma* de la ecuación

(1) Del mismo modo podríamos suponer referidas estas curvas a un polo y eje polar, en cuyo caso su ecuación sería

$$f(\rho \omega \alpha) = 0 \quad (a)$$

(2) Del griego $\alpha\beta\alpha\chi$ (tabla para el juego de dados). Para mayor claridad conservaremos el nombre de ábacos a los formados por *redes* de curvas acotadas; dando el de nomogramas a los formados por curvas cuyos puntos estén acotados.

propuesta [1]. La construcción geométrica que sirve para determinar la n^a variable se llama la *clave* del ábaco o del nomograma.

3.—Familias de ábacos, claves.—Se comprende por lo dicho que una ecuación tal como la [1] es representable por una infinidad de ábacos, que dependen de las formas que tengan las ecuaciones (a) o (b) que definen el sistema representativo, así como de la clave o construcción geométrica por medio de la cual se deduce la in-

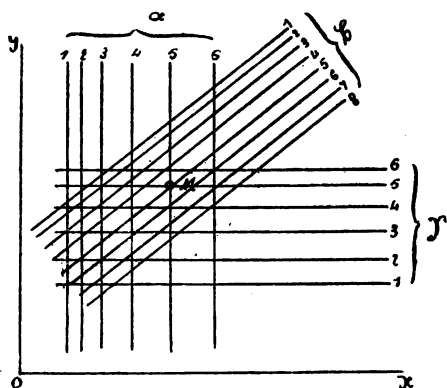


Fig. 4.

cógnita. Se dice que varios ábacos son de la misma *familia* cuando, teniendo la misma clave, las ecuaciones que definen su sistema representativo son del *mismo grado*; el objeto principal de la Nomografía es elegir de entre todos los sistemas o familias de ábacos que puedan resolver la ecuación propuesta, aquéllos cuyo trazado y dibujo sea más sencillo al par que tenga clave más expedita. Así, por ejemplo, la representación por redes de *rectas* acotadas es más sencilla (fig. 4) que por redes de curvas (fig. 5), y ésta es más fácil cuanto las curvas tengan menos inflexiones; el entrecruzamiento de los elementos de estas redes resulta siempre algo

confuso, por lo cual es más práctico el empleo de rectas o curvas cuyos puntos estén acotados (fig. 2) y todavía más cómodo el uso de escalas móviles rectilíneas (figura 3). Respecto a las claves, son las más sencillas y empleadas las siguientes.

a) Dado un valor α_1 de α (figs. 4 y 5) y otro ϵ_1 de ϵ , se sigue la recta o curva cuya cota es α_1 hasta su encuentro con la acotada ϵ_1 en el punto M; la cota de la recta o curva del sistema γ que pase por M da la solución del problema.

b) Los tres valores $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1$ (fig. 2) que resuelven la ecuación propuesta, están sobre una recta MN que pasa

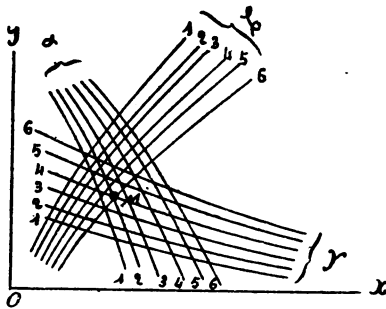


Fig. 5.

por los puntos cuyas cotas son $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1$. Igualmente podría tenerse en vez de MN, un círculo u otra curva cualquiera.

c) Se tienen cuatro redes de rectas o curvas ($\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$); cualquier solución $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1, \delta_1$ de la propuesta (fig. 6) es tal, que, uniendo los puntos M y N de intersección de las curvas acotadas α_1, ϵ_1 y γ_1, δ_1 , la recta MN resulta paralela a una dirección RR' determinada.

d) Si en vez de cuatro redes se tienen cuatro curvas acotadas $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1, \delta_1$ (figs. 7 y 8) puede ocurrir que las rec-

tas MN, RS, que unen valores correspondientes α_1 , ϵ_1 y γ_1 , δ_1 de las variables, sean paralelas (fig. 7) o perpendiculares (fig. 8).

e) Puede darse el caso de ecuaciones representadas

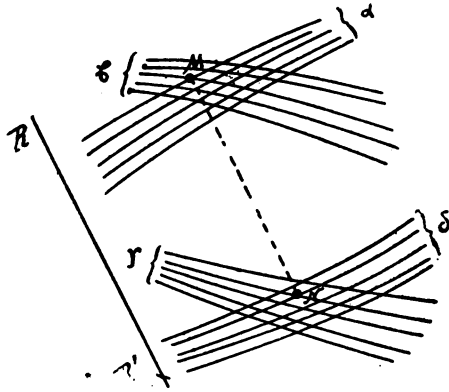


Fig. 6.

por dos curvas acotadas α ϵ y dos redes de curvas γ y δ (fig. 9.^a). La clave puede ser entonces que los puntos

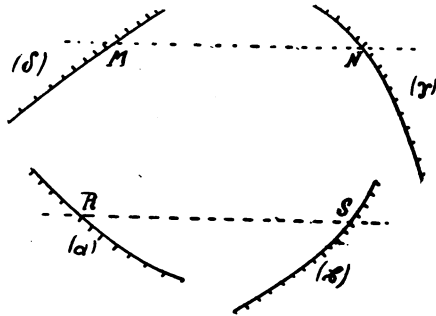


Fig. 7.

α_1 , ϵ_1 estén en línea recta MON, con el punto O de intersección de las curvas cuyas cotas son α_1 y ϵ_1 .

4.—Escalas.—Para trazar las curvas acotadas, es pre-

ciso el uso de las *escalas*. Si tenemos, por ejemplo, una ecuación $f(\alpha)$ y hacemos $x = f(\alpha)$ o $y = \varphi(\alpha)$ y tomamos sobre dos ejes coordenados los valores x o y co-

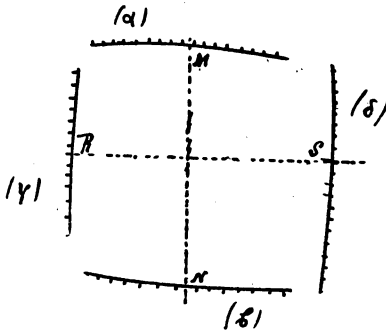


Fig. 8.

respondientes a un mismo valor de α , se obtendrá la línea AB (fig. 10) definida por las ecuaciones anteriores y, acotando cada punto con el valor de α que le corres-

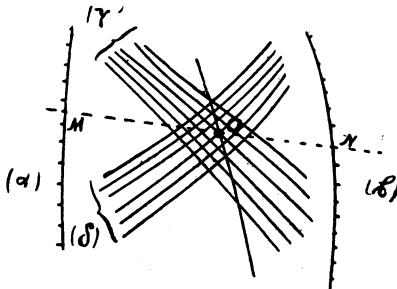


Fig. 9.

ponde, tendremos un sistema de puntos de una cota. El soporte de este sistema de puntos es una recta cuando $f(\alpha)$ y $\varphi(\alpha)$ están ligadas por una relación lineal, y entonces el sistema de puntos AB recibe el nombre de

escala de la función $f(\alpha)$. La forma general de toda escala rectilínea es

$$u = mf(\alpha) \quad [2]$$

en cuya expresión m es el *módulo*, o sea el valor que toma u cuando $f(\alpha)$ es igual a la unidad; si hacemos crecer α en progresión aritmética con una *razón* cualquiera, cada valor de u distará del anterior o del que le sigue una cantidad *variable* definida por la caracterís-

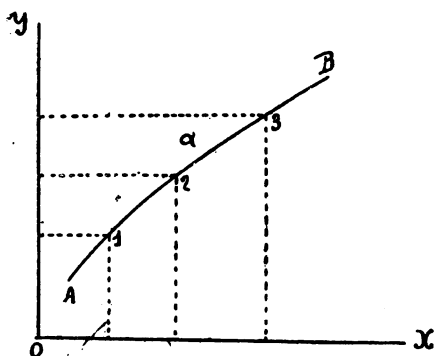


Fig. 10

tica f de la función [2]. Pasaremos revista a las escalas más usadas en Nomografía.

Escala regular.—Está definida por la función $u = m\alpha$, en la que claramente puede verse que si hacemos variar α según una progresión aritmética cuya razón sea r , los valores de u variarán también según otra progresión cuya razón será $m r$; a intervalos iguales en la variación de α corresponden intervalos iguales en la función u , siendo el tipo de estas escalas el doble decímetro, sobre cuya construcción y uso no hemos de insistir.

Escala logarítmica.—Representa la función $u = m$

$\log \alpha$ base de las reglas de cálculo. Para construirla, una vez elegido el módulo m , basta ir tomando sobre una recta los valores de los logaritmos de los números, y acotarla con los números correspondientes. Observando que $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1.000 = 3$, etc., tomaremos sobre una recta OX (fig. 11) tres longitudes, iguales al módulo m , acotando los puntos que resulten con los números 1, 10, 100 y 1.000. Después acotaremos el primer trozo según los valores de los logaritmos de los números 1 a 10, el segundo según los de 10 a 100 y así sucesivamente. Es de observar la notable propiedad de esta escala, que consiste en la repetición de la longitud de sus intervalos para valores de α , diez, ciento, mil, etcétera, veces mayores, por lo cual, para construirla, basta tener un *patrón* acotado de 1 a 10 y cuya longitud sea igual al módulo que se desee (1).

Escala segmentaria.—Representa funciones de la forma

$$u = m \frac{2\alpha}{\alpha + 1} = m \frac{2}{1 + \frac{1}{\alpha}}$$

muy frecuentes en las aplicaciones, siendo utilísima para que puedan quedar representados todos los valores de u cuando α crece de 0 a ∞ . Se ve, en efecto, que para $\alpha = 0$, $u = 0$, y que para $\alpha = \infty$ $u = 2m$, por lo cual, adoptando para m un valor conveniente, la magnitud $2m$

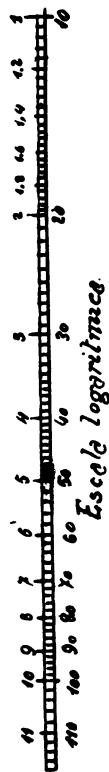


Fig. 11.

(1) La casa Tavernier Gravet de París construye *patrones logarítmicos* con módulos de 1^m , $0^m,50$, $0^m,25$, $0^m,125$ y $0^m,0625$; también se ha construído *papel logarítmico* análogo al cuadrículado que se usa para dibujo y del que más adelante damos una muestra.

puede llegar a ser suficientemente grande. Esta escala (fig. 12) va disminuyendo el intervalo de sus trazos a medida que α aumenta, y si no quiere fraccionarse hay que elegir el módulo de manera que, al intervalo más pequeño que se tenga, corresponda en la función una longitud apreciable entre los trazos.

Escala naturales.—Suelen llamarse así las de ciertas funciones, tales como

$$u = m\alpha^n, \quad u = m\sqrt[n]{\alpha}, \quad u = m \operatorname{sen} \alpha, \\ u = m \cos \alpha, \quad u = m \operatorname{tang} \alpha$$

y otras que se encuentran frecuentemente en la práctica.

Todas ellas son irregulares, no debiendo emplearse las dos primeras para valores de n superiores a 3, a causa de la desigualdad de sus intervalos; son en cambio muy importantes las *trigonométricas*, de cuya construcción nos vamos a ocupar.

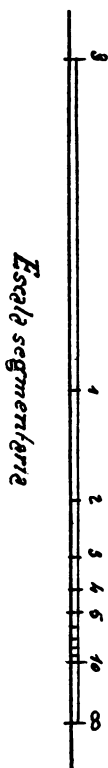


Fig. 12.

El procedimiento que se ocurre es, una vez fijado el módulo, coger una tabla numérica y acotar la recta soporte por medio del doble decímetro; así por ejemplo, para la escala de senos, elegido $m = 0^m,10$ (fig. 13), tomaríamos una longitud $AB = 0^m,10$, cuyos extremos acotaremos con los números 0° y 90° , puesto que para $\alpha = 0$; $u = m \operatorname{sen} 0^\circ = 0^m,10 \operatorname{sen} 0^\circ = 0$, y para $\alpha = 90^\circ$ $u = 0^m,10 \times \operatorname{sen} 90^\circ = 0^m,10$. Después iremos viendo en la tabla numérica los valores intermedios y multiplicándolos por $0^m,10$, tomando el resultado con el doble decímetro en la escala y acotando los puntos resultantes con el número de grados del arco correspondiente.

Es más sencilla, sin embargo, la construcción gráfica siguiente. Trácese un cuadrante de radio m (fig. 14) y dividásele con un transportador en grados, minutos, etcétera, con arreglo al intervalo que necesitemos para α . Si proyectamos los puntos de división sobre los ra-

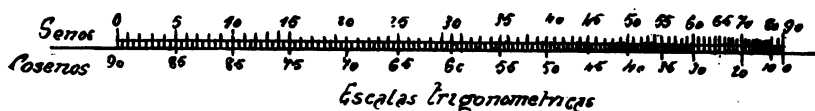


Fig. 13.

dios OA y OB, bastará acotar las proyecciones para tener en OA la escala de senos y en OB la de cosenos de 0 a 90° . Fácil es ver que, construída cualquiera de ellas, basta poner en vez de 0° , 10° , 90° , los com-

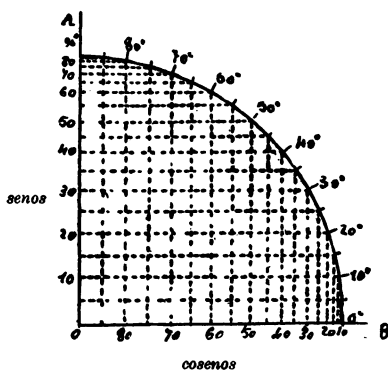


Fig. 14.

plementos 90° , 80° , 0° para obtener la otra, así como para valores mayores de 90° tener en cuenta los ángulos suplementarios.

La de tangentes se construye (fig. 15) una vez trazado el cuadrante de radio m , sin más que trazar los radios que pasan por las divisiones 10° , 20° , etc., y acotar

con estos números sus puntos de intersección con la tangente AT. La fig. 15 indica la construcción de la escala de secantes OS, y de modo análogo se dibujarían

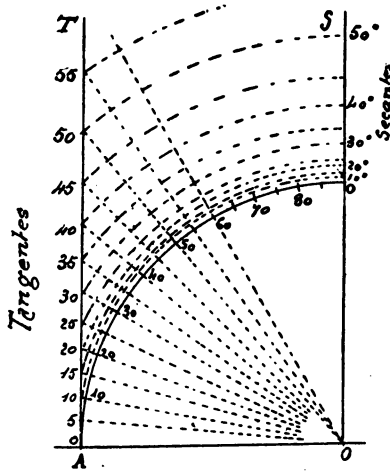


Fig. 15.

la de cosecantes y cotangentes, con lo cual dispondremos de las escalas

$$\begin{aligned} u &= m \operatorname{sen} \alpha & u &= \frac{m}{\operatorname{sen} \alpha} = m \operatorname{cosec} \alpha \\ u &= m \cos \alpha & u &= \frac{m}{\cos \alpha} = m \sec \alpha \\ u &= m \operatorname{tang} \alpha \\ u &= m \cot \alpha \end{aligned}$$

a las que pueden añadirse las $\frac{m}{\operatorname{tang} \alpha}$ y $\frac{m}{\sec \alpha}$, muy útiles en ciertos casos, puesto que las escalas de tangentes, cotangentes, secantes y cosecantes no caben en los límites del dibujo por tener u el valor ∞ para $\alpha = 90^\circ$ y 0° , respectivamente.

Escalas derivadas.—Resultan de la función general

$$x = mf(x)$$

cuando se sustituye α por una función cualquiera, verbigracia, $M\alpha \pm N$, $\frac{\alpha}{M}$ siendo M y N cantidades constantes. Para construirlas basta aplicar al soporte el patrón de la escala funcional primitiva correspondiente, y acotar con arreglo a los valores que tenga la función derivada. Por ejemplo, para construir la escala

$$u = m \log (M\alpha + N)$$

tendríamos, puesto que para

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0 & u = m \log N \\ \alpha = 1 & u = m \log (M + N) \\ \alpha = 10 & u = m \log (10 \cdot M + N) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \text{etcétera,} \end{array}$$

que colocar el patrón logarítmico de módulo m sobre el soporte y acotar con cero la división correspondiente al número N, con 1 la ídem, íd., al número $M + N$, con 10 la ídem, íd., al número $10M + N$, y así sucesivamente, haciendo lo mismo para los valores intermedios. Entre las escalas derivadas pueden también contarse las de los logaritmos de las líneas trigonométricas $u = m \log \sin \alpha$, $u = m \log \tan \alpha$, etc., cuya construcción no ofrece dificultad y se ve con frecuencia en las reglas de cálculo.

Escalas transformadas.—Son las deducidas de otra cualquiera por una transformación geométrica: la que se emplea con más frecuencia es la escala *lineal general*, representativa de la función

$$u = \frac{M\alpha + N}{P\alpha + Q} \quad [3]$$

siempre que $M \times Q$ no sea igual a $P \times N$. Estas escalas pueden deducirse de una escala *regular* cualquiera por una simple *transformación homográfica*. Sea, en efecto, OX (fig. 16) el soporte de la escala lineal [3] y supongamos conocida la cota del punto O, por ejemplo. Si por este punto trazamos una recta OX' y sobre ella señala-

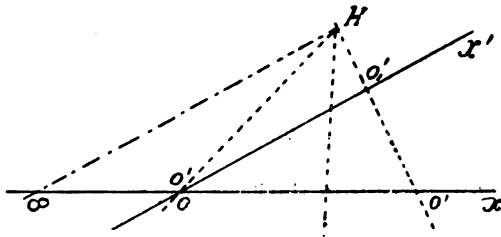


Fig. 16

mos una escala regular cualquiera, de tal modo que su cota O' sea la misma del punto O, las graduaciones en el sentido OX vendrán definidas por ecuaciones de la forma

$$u = u'' - u' = m \frac{M\alpha' + N - M\alpha'' - N}{P\alpha + Q} = m \frac{M(\alpha'' - \alpha')}{P\alpha + Q}$$

referidas al origen O y ejes coordenados OX, OX', al paso que las graduaciones de la escala O'X' (regular) tendrán por ecuación, referida a los mismos ejes

$$u_1 = m_1(\alpha'' - \alpha')$$

Pero la ecuación de una recta cualquiera HO₁O' que una dos puntos O₁ O' que tengan igual cota en ambas escalas, será

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{u_1} = 1 \quad (1) \quad \text{o sea} \quad \frac{P\alpha + Q}{m \cdot M(\alpha'' - \alpha')} x + \frac{1}{m_1(\alpha'' - \alpha')} y = 1$$

(1) Condición para que una recta pase por dos puntos, cuando éstos se encuentran sobre los ejes coordenados.

ecuación de primer grado en α , y que, por lo tanto, representa la general de un haz de rectas concurrentes en el punto H, cuyas coordenadas pueden deducirse de las ecuaciones

$$\frac{Px}{mM} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{Qx}{mM} + \frac{y}{m_1} + \alpha'' = 0.$$

Obtenido así el punto H, cualquier recta que pase por él y corte en un punto O'_1 a la escala regular, dará en la lineal OX un punto O' de igual cota.

Escalas isógradas.—Son aquéllas en que los intervalos correspondientes a la función u son iguales, y muy útiles cuando se quiere, verbigracia, que el cuadriculado del ábaco resulte regular, es decir, formado de líneas equidistantes. Para construirlas hay que averiguar a qué valores de α corresponden valores equidistantes de u , y son muy difíciles de dibujar sin una tabla numérica muy completa de valores de la función $mf(\alpha)$.

5.—Construcción geométrica y lectura de las escalas.—

Dada una escala cualquiera de módulo m , puede construirse otra de módulo m_1 valiéndose de un haz de rectas y de los principios de la homografía. Si colocamos, en efecto (fig. 17), la escala AB de módulo m , paralelamente y a tal distancia del soporte $A' B'$ de la nueva escala, que se verifique

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{m}{m_1}$$

toda recta que pase por O y corte a la escala AB en un punto M, cortará al soporte $A' B'$ en un punto M' de igual cota que el M.

La buena lectura de las escalas depende, ante todo, de la claridad del dibujo y del tamaño de los intervalos,

por lo cual es tarea muy importante la de escoger el módulo más apropiado en relación con el *campo* de las variables, dentro del cual necesitamos los valores de las funciones o de la incógnita. Generalmente no se acotan todos los trazos de la escala, sino aquéllos de cota entera o que tienen importancia, bastando para facilitar la lectura hacer más largos algunos trazos, como ocurre en las reglas usuales. La interpolación se hace a ojo, no siendo, por lo general, errónea en más de $\frac{1}{10}$ de la longitud del intervalo, debiendo procurarse no sea nunca

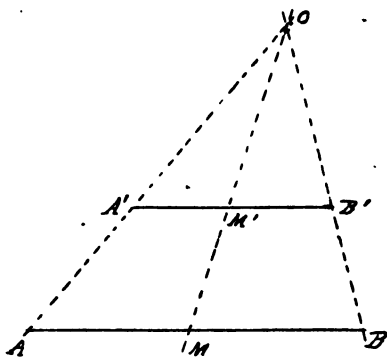


Fig. 17.

esta longitud menor de $0^m,001$. Mas, hay ocasiones en que, bien por la extensión de los límites de las variables, bien por exigencias de la lectura o por la forma especial de la función que se representa, sería preciso dar a las escalas longitudes exageradas para el tamaño del nomograma o reducir sus módulos hasta perder la precisión requerida en la lectura; lo que hace necesario un modo de *encajar*, digámoslo así, el ábaco dentro de un cuadro de dimensiones determinadas, sin que se pierda

la disposición relativa de las escalas. Este objeto puede conseguirse desde luego con la *fotografía*, reduciendo o ampliando el nomograma en la relación necesaria; pero, como el problema se presenta muchas veces al construir el ábaco, hay que recurrir al método llamado de los *multiplicadores correspondientes* que vamos a indicar.

Principio de los multiplicadores correspondientes.— Sea la ecuación [1] que ha de representarse

$$F(\alpha \beta \gamma \delta \dots) = 0 \quad [1]$$

y supongamos sea tal que a una solución cualquiera $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$ etc., corresponda otra $\lambda_1 \times \alpha_1, \lambda_2 \times \beta_1, \lambda_3 \times \gamma_1, \lambda_4 \times \delta_1, \dots$. Toda red

$$f(xy\alpha) = 0 \quad (a)$$

representativa de una cualquiera de las variables α , da lugar a otra red

$$f(xy \lambda_1 \times k) = 0 \quad (a')$$

que podrá superponerse a la primera acotándola de un modo diferente, y toda curva

$$\left. \begin{array}{l} x = f(\alpha) \\ y = \varphi(\alpha) \end{array} \right\} \quad (b)$$

dará lugar a otra curva idéntica

$$\left. \begin{array}{l} x = f(\lambda_1 \times \alpha) \\ y = \varphi(\lambda_1 \times \alpha) \end{array} \right\} \quad (b')$$

pero que estará acotada de modo distinto. Luego la superposición de ambos sistemas representativos dará

lugar a un ábaco cuyas escalas tendrán doble graduación, pero que permitirá a veces aumentar el módulo o colocar las escalas dentro de los límites del dibujo. Escogiendo los *multiplicadores* $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ de tal manera que sea fácil pasar *de memoria* del valor $\lambda_1 \times \alpha_1$ al α_1 , basta escribir una sola de las graduaciones, no habiendo otra

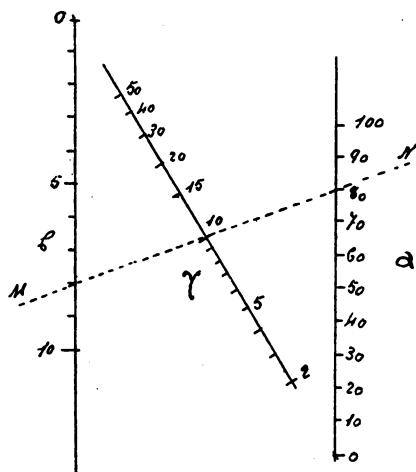


Fig. 18.

dificultad que, si hemos elegido, verbigracia, $n - 1$ multiplicadores de la ecuación [1], de manera que sean sencillos, el n° viene determinado *à fortiori* por la ecuación, siendo a veces complicado el cálculo de memoria y preciso, por lo tanto, inscribir las dos graduaciones en la escala correspondiente.

Por ejemplo: sea la ecuación

$$\alpha = 6 \times \gamma$$

que se representa en la figura 18 y cuyas escalas supondremos, demasiado reducidas para leer con toda cla-

ridad. Si hacemos $\lambda_2 = 10$ $\lambda_3 = 100$, es claro que, si la ecuación ha de verificarse, λ_1 debe ser igual a $10 \times 100 = 1000$, y tendremos

$$1000 \alpha = 10 \cdot \epsilon \times 100 \gamma$$

Luego si graduamos las escalas ϵ y γ con arreglo a los valores 10 ϵ y 100 γ , acotándolas, sin embargo, con arreglo a los de ϵ y γ , es evidente que en la escala α tendremos, no los valores α , sino los de 1000 α , por lo cual será preciso dividir por 1000 la lectura que obtenemos al hacer la alineación MN correspondiente.

6.—Anamorfosis.—Es, en general, toda transformación algebraica de la ecuación propuesta [1], en virtud de la cual, si ésta era representable por una serie de redes curvas (*a*) o curvas acotadas (*b*), puede lograrse su representación por medio de redes *de rectas* (*a*) o *rectas* acotadas (*b*) (1).

Como se ve, la anamorfosis es sumamente útil para obtener y trazar nomogramas sencillos sin variar la clave que resuelve el ábaco, y, como veremos más adelante, es de uso indispensable en ciertos problemas nomográficos. De la definición anterior se deduce que, si una red cualquiera definida por la ecuación

$$f(xy\alpha) = 0 \quad (a)$$

puede ponerse bajo la forma

$$\varphi_1(\alpha)x + \varphi_2(\alpha)y + \varphi_3(\alpha) = 0 \quad (a')$$

(1) Puede generalizarse esta definición llamando anamorfosis al procedimiento de representar una ecuación por las redes de líneas más sencillas posibles. Anamorfosis sería, a nuestro juicio, también la transformación de la propuesta necesaria para ser representable, verbigracia, por redes de círculos concéntricos.

su sistema representativo estará formado por una serie de rectas cuyas coordenadas tangenciales (1) serán

$$u = \frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)} \quad v = \frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)}$$

y habremos realizado la anamorfosis del sistema representativo de la variable α .

Del mismo modo, siempre que la curva acotada definida por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\alpha) \\ y &= \varphi(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

pueda ponerse bajo la forma

$$x = \frac{\varphi_1(\alpha)}{\omega_3(\alpha)} \quad y = \frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)} \quad [b']$$

la ecuación *puntual* (cartesiana) de la curva se obtendrá eliminando α entre las relaciones $[b']$ siendo evidente que esta curva será una recta, cuando, hecha la eliminación, se llegue a la forma

$$Ax + By + C = 0$$

lo que ocurrirá cuando las relaciones $[b']$ sean de primer grado en α , quedando también entonces hecha la anamorfosis del sistema de puntos representativos de la variable α .

(1) Si en la ecuación de una recta $Ax + By + C = 0$, referida a ejes cartesianos X, Y , los segmentos a y b que determina sobre estos ejes son $a = -\frac{C}{B}$ y $b = -\frac{C}{A}$, sus coordenadas tangenciales serán $u = \frac{1}{a} = -\frac{B}{C}$ y $v = \frac{1}{b} = -\frac{A}{C}$.

II.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

7.—Abacos cartesianos y su anamorfosis.—Sea la ecuación de dos variables

$$F(\alpha \epsilon) = 0 \quad [1]$$

que queremos resolver nomográficamente. Consideremos las dos redes

$$\left. \begin{aligned} f(xy\alpha) &= 0 \\ f(xy\epsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

referidas a los mismos ejes coordenados X e Y. Si eliminamos α y ϵ entre las ecuaciones [1] y (a) llegaremos a una ecuación entre x e y que será la de la *una línea* donde se encontrarán los puntos de cotas α y ϵ . La forma más sencilla de las ecuaciones (a) es, evidentemente,

$$\left. \begin{aligned} x - \alpha &= 0 \\ y - \epsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a_1)$$

representativas cada una de un sistema de paralelas a los ejes coordenados, por lo que el ábaco tendrá la forma de la figura 19 y su clave será la de seguir la línea de cota α_1 hasta que corte a la curva AB en M, y leer después la cota ϵ_1 de la línea del otro sistema que pase por dicho punto.

Para hacer la *anamorfosis*, es decir, que la curva AB sea una recta, es preciso elegir las redes (a) de manera

que la eliminación de α y ϵ entre ellas dé lugar a una ecuación de *primer grado* entre x e y .

Ejemplo.—Sea la ecuación [1] $S = \pi \frac{d^2}{4}$ que da el área S del círculo en función del diámetro d , y que puede escribirse $S = 0,785d^2$. Adoptando el sistema de

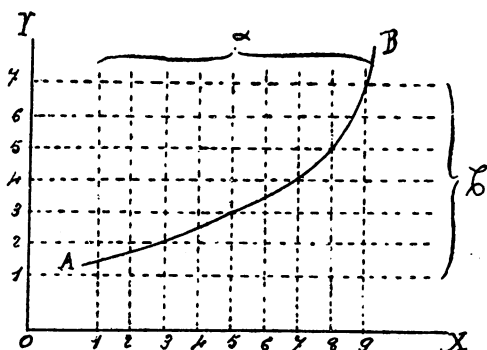


Fig. 19.

redes (a_1) de paralelas a los ejes coordenados, estas redes serán

$$\left. \begin{array}{l} x = d \\ y = S \end{array} \right\} (a_1)$$

y, eliminando S y d entre la ecuación propuesta y las (a_1), tendremos

$$0,785x^2 - y = 0 \quad [2]$$

que es la ecuación de la curva AB de la figura 19 en este caso, y que, como puede verse, es una parábola de 2.º grado que pasa por el origen de coordenadas, y cuyo parámetro es 0,637, puesto que la [2] puede escribirse

$$x^2 = 2 \times 0,637y$$

UNIVERSITY OF MICHIGAN

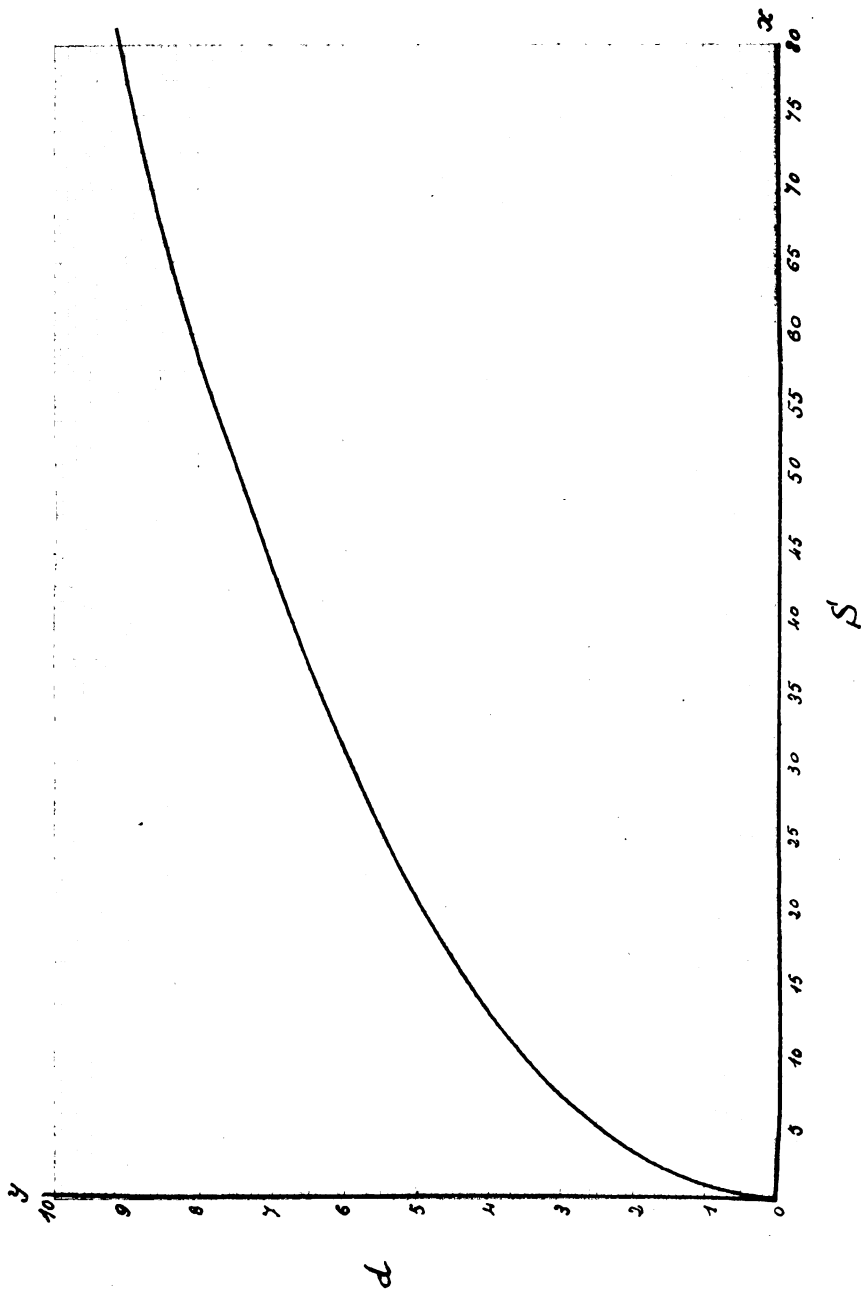


Fig. 20.—Ábaco del área del círculo.

La figura 20 (lámina I) es el ábaco de la ecuación [1] construído con módulos $0^m,002$ para la escala S y $0,01$ para la escala d .

Para hacer la anamorfosis, es preciso transformar la [1] de manera que, elegidas otras redes (a), resulte la [2] de primer grado, o variar una de las redes (a_1) de manera que se obtenga el mismo resultado. Lo primero puede hacerse tomando en [1] logaritmos, con lo cual se convierte en

$$\log S = \log 0,785 + 2 \log d \quad [1']$$

y eligiendo las redes

$$\left. \begin{array}{l} x = \log S \\ y = \log d \end{array} \right\} \quad (a_2)$$

la eliminación de S y d entre las ecuaciones [1'] y [a_2], da por resultado la recta

$$y - 2x = \log 0,785$$

fácil de construir, con la que se obtiene el ábaco de la figura 21 (lámina II) que esté hecho con el módulo $0^m,10$ (1).

Lo segundo puede hacerse con la propuesta $S = 0,785 d^2$, adoptando las redes

$$\left. \begin{array}{l} x = d^2 \\ y = S \end{array} \right\} \quad (a_3)$$

que darán, después de hecha la eliminación, la recta

$$y = 0,785x \quad [2']$$

(1) Como puede verse en la figura 21, el *papel logarítmico* o cuadriculado según la escala logarítmica facilita extraordinariamente las construcciones de ábacos de esta clase.

Trazada esta recta (fig. 22, lámina III) y adoptado un módulo $m = 0^m,002$, por ejemplo, se acotará el eje de las Y con una escala regular, y el eje de las X con una escala de cuadrados ($x = m d^2$), bastando después trazar las paralelas correspondientes para terminar el ábaco.

8.—Abacos de escalas de igual soporte.—Hemos visto (n.º 6) que si se ha hecho la anamorfosis en la ecuación [1], $F(\alpha\epsilon) = 0$, será preciso que las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} f(xy\alpha) &= 0 \\ f(xy\epsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

sean redes de rectas y, por lo tanto, que afecten la forma lineal.

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha)x + \varphi(\alpha)y + \psi(\alpha) &= 0 & (\alpha) \\ f(\epsilon)x + \varphi(\epsilon)y + \psi(\epsilon) &= 0 & (\epsilon) \end{aligned} \right\}$$

Pero como toda solución del sistema $(\alpha)(\epsilon)$ ha de serlo de $F(\alpha\epsilon) = 0$, y recíprocamente (n.º 2), es claro que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(\alpha) & \varphi(\alpha) \\ f(\epsilon) & \varphi(\epsilon) \end{vmatrix} = f(\alpha)\varphi(\epsilon) - f(\epsilon)\varphi(\alpha) = 0 \quad [2]$$

que contiene la condición para las soluciones comunes del sistema $(\alpha)(\epsilon)$, debe *identificarse* con la ecuación propuesta, para que éste sea representable por las redes de rectas indicadas.

Consideremos ahora las líneas definidas por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad [\alpha] \quad y \quad \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{f(\epsilon)}{\varphi(\epsilon)} \end{aligned} \right\} \quad [\epsilon]$$

LÁMINA II

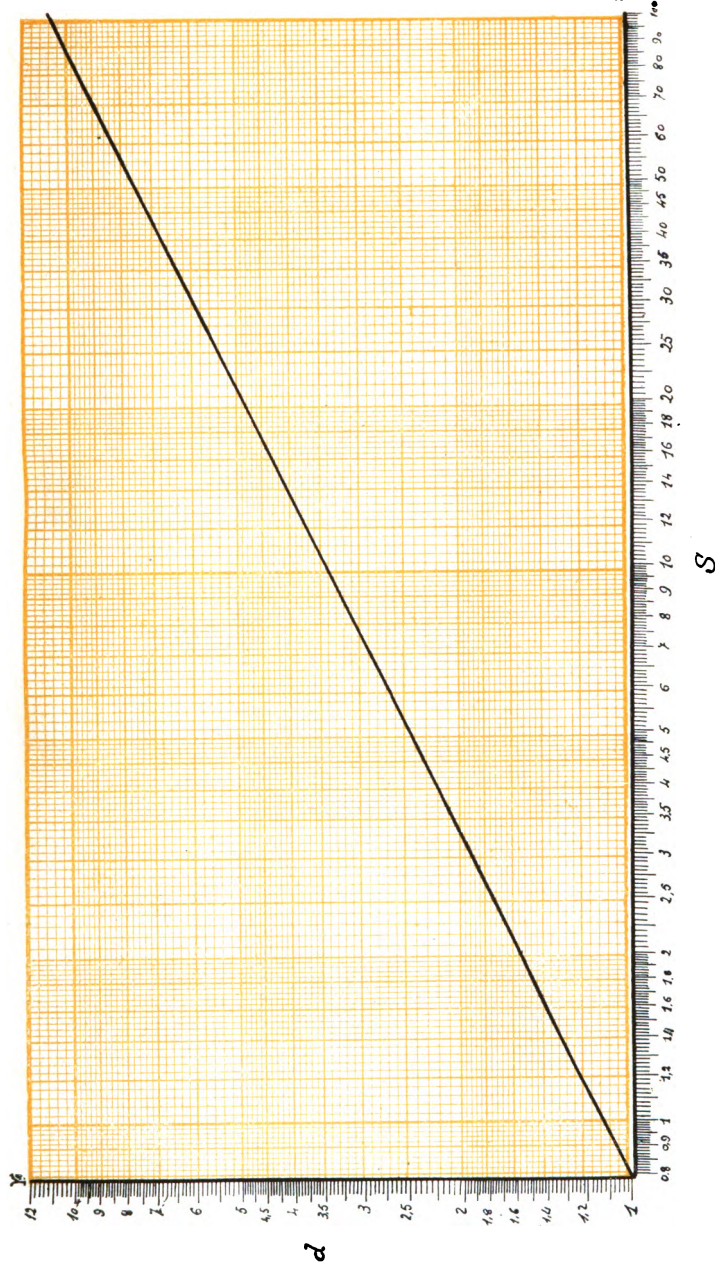


Fig. 21.—Ábaco logarítmico para el área del círculo.

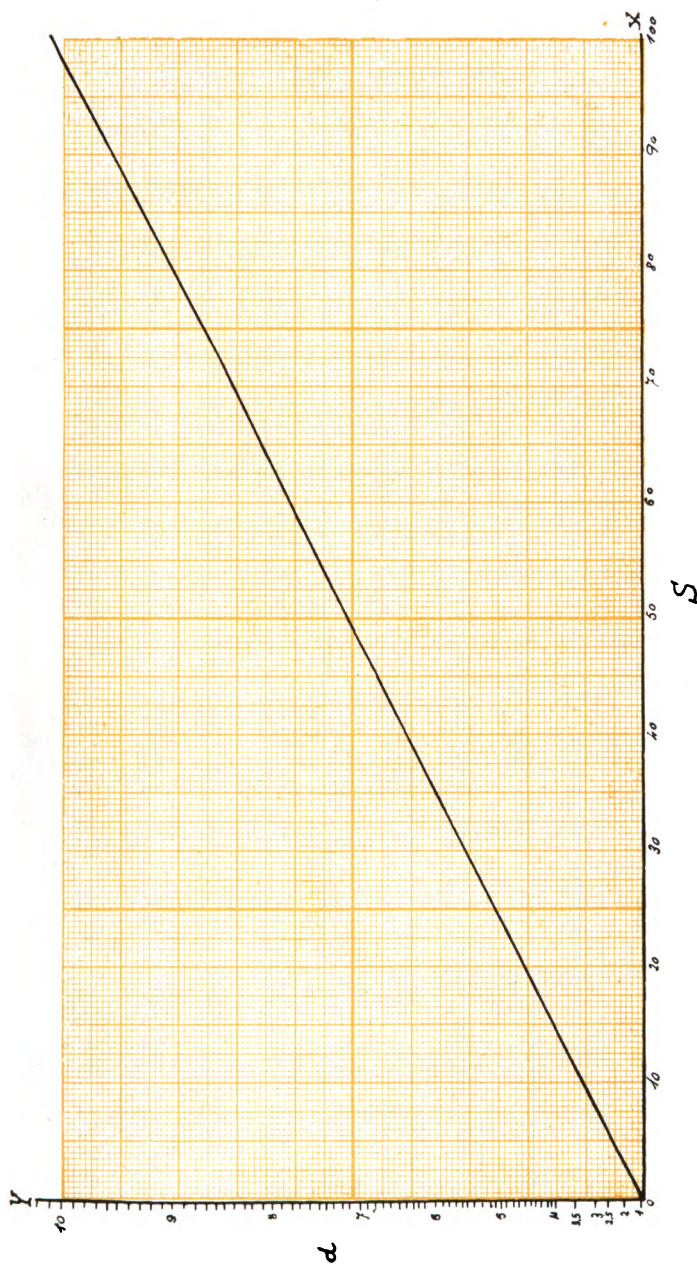


Fig. 22.—Ábaco para el área del drenio.

que, en coordenadas cartesianas, representan el eje de las Y. La condición $\Delta = 0$, expresa la *superposición* de las líneas acotadas $[\alpha]$ y $[\epsilon]$ puesto que si se tiene

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f(\epsilon)}{\varphi(\epsilon)}$$

resulta, evidentemente, la condición [2]

$$f'(\alpha)\varphi(\epsilon) - f(\epsilon)\varphi'(\alpha) = 0$$

Esto indica en lenguaje geométrico, que, construimos con el mismo módulo las escalas rectilíneas

$$u = m \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \quad \text{y} \quad v = m \frac{f(\epsilon)}{\varphi(\epsilon)}$$

a uno y otro lado del mismo soporte OY (fig. 23), coincidirán siempre las cotas de dos valores $\alpha_1 \epsilon_1$ que satisfagan la ecuación [1] propuesta, y tendremos el nomograma más sencillo, con la clave más sencilla posible, pues bastará buscar en su escala el valor α_1 que se tenga, para encontrar a su lado la cota ϵ_1 del ϵ que le corresponde.

Es, pues, claro que, siempre que la ecuación propuesta sea de la forma $\Delta = 0$, y en general de la forma

$$f(\alpha) = \varphi(\epsilon)$$

podrá representarse por un nomograma compuesto de dos escalas rectilíneas construidas sobre el mismo soporte.

Ejemplos.—1.º La ecuación ya indicada $S = 0,785 d^2$ puede nomografiarse construyendo a un lado y otro de la recta AB las escalas.

$$u = mS$$

$$u = m \cdot 0,785 d^2$$

y haciendo que coincidan dos valores cualesquiera correspondientes. Así se ha construido el nomograma de la figura 23 (lámina IV) adoptando como módulo $m = 0,002$. De modo análogo se construiría

$$\log S = \log 0,785 + 2 \log d$$

trazando las escalas

$$\begin{aligned} u &= m \log S \\ v &= m' [\log 0,785 + 2 \log d] \end{aligned}$$

que se ha realizado en la figura 24 (lámina IV) acoplando los valores $d = 1$, $S = 0,785$ de dos escalas logarítmicas de módulos $0^m,20$ y $0^m,10$ respectivamente.

2.º El volumen de la esfera tiene por expresión, en función del diámetro

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3 = 0,5235 d^3$$

y tomando logaritmos

$$\log V = \log 0,5235 + 3 \log d$$

se construirá el nomograma con las escalas

$$\begin{aligned} u &= m \log V \\ v &= m [\log 0,5235 + 3 \log d] \end{aligned}$$

siendo aun más sencillo construir la escala u con módulo $m = 0,05$, y después la $u' = \log d$ con módulo $m' = 3 \times 0,05 = 0^m,15$, acoplando los valores $d = 1$ y $V = 0,5235$. Así se ha hecho en la figura 25 (lámina IV).

3.º Sea la ecuación exponencial $y = e^x$, que puede escribirse

$$\log y = x \log e \quad \text{o sea, puesto que } e = 2,7182, \text{ y } \log e = 0,43427$$

$$\log y = 0,43427 x$$

LÁMINA IV

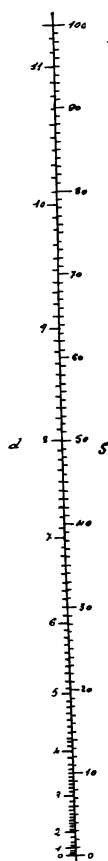


Fig. 23.

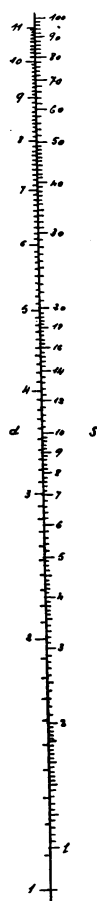


Fig. 24.

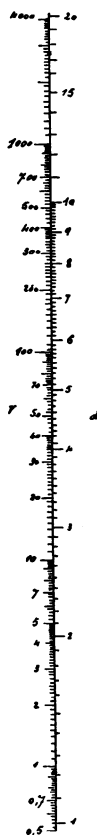


Fig. 25.

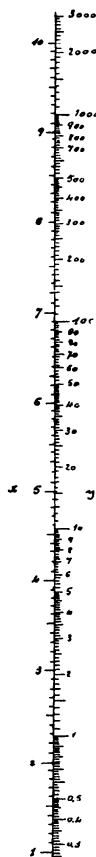


Fig. 26

Figs. 23 y 24.—Área del círculo $S = 0,785 \cdot d^2$

Fig. 25.—Volumen de la esfera $V = 0,5235 \cdot d^3$

Fig. 26.—Ecuación exponencial $y = e^x$

Adoptando como módulo $0^m,05$ resulta el nomograma de la figura 26 (lámina IV) compuesto como se ve de la escala natural

$$u = 0^m,02172x$$

y de la logarítmica,

$$v = 0^m,05 \log y$$

habiéndose hecho coincidir las escalas en los valores $x = 1$, e $y = 2,7182$.

III.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE TRES VARIABLES.

9.—Abacos cartesianos.—Consideremos la ecuación de tres variables

$$F(\alpha \epsilon \gamma) = 0 \quad [1]$$

y las de tres redes de curvas $[a]$

$$\left. \begin{aligned} f(xy\alpha) &= 0 \\ f(xy\epsilon) &= 0 \\ f(xy\gamma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

tales, que, eliminando entre ellas x e y se obtenga la propuesta [1]. Es claro que a toda solución $(\alpha, \epsilon, \gamma)$ de esta última corresponderán tres curvas, cada una de un sistema, de las redes (a) , curvas que pasarán por un mismo punto M representativo de la solución buscada, obte-

niéndose un ábaco compuesto de tres redes (fig. 5) cuya clave será la más sencilla posible (n.º 3, α).

Siendo arbitraria la elección de dos de las redes (α), [n.º 3] la tercera resultará de la eliminación de α y ϵ entre estas ecuaciones y la propuesta; por tanto, lo más sencillo es elegir estas dos redes, de la forma

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \epsilon \end{cases} \quad (a')$$

es decir, de rectas paralelas a los ejes coordenados, en cuyo caso la 3.ª red será, evidentemente,

$$F(xy\gamma) = 0 \quad (a'')$$

obteniéndose entonces un ábaco *cartesiano*, compuesto de dos sistemas de paralelas a los ejes coordenados y de un sistema de curvas dadas por la ecuación (a'').

Ejemplos.—1.º ABACOS DE LA MULTIPLICACIÓN.—Sea la ecuación $F(\alpha\epsilon\gamma) = 0$ en este caso

$$\alpha = \epsilon\gamma \quad \text{es decir} \quad \alpha - \epsilon\gamma = 0 \quad [1]$$

Escogiendo las redes de paralelas a los ejes coordenados

$$\begin{cases} x = \epsilon \\ y = \gamma \end{cases} \quad (a')$$

y eliminando ϵ y γ entre las ecuaciones [1] y (a') resulta para la tercera red la ecuación

$$\alpha = xy \quad (a'')$$

que, como puede verse, representa una serie de hipérbo-

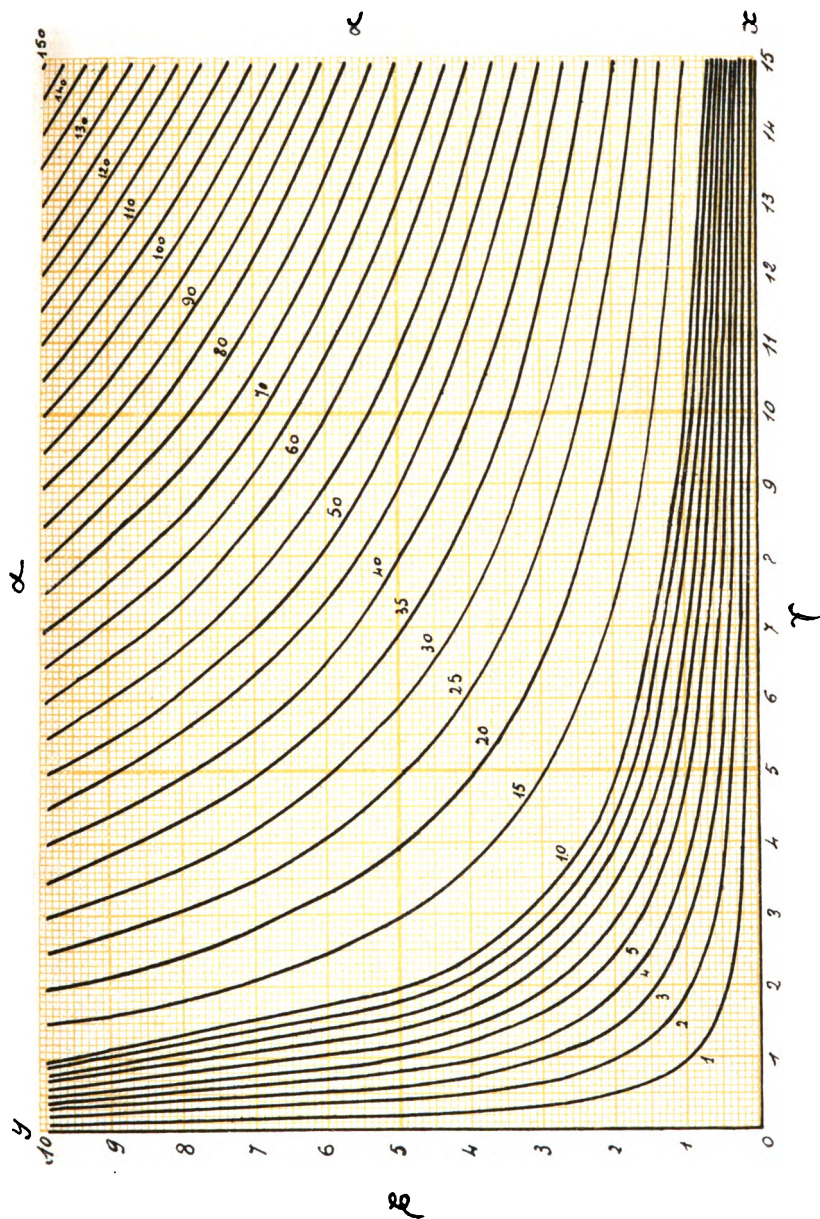


Fig. 27.—Ábaco de la multiplicación.

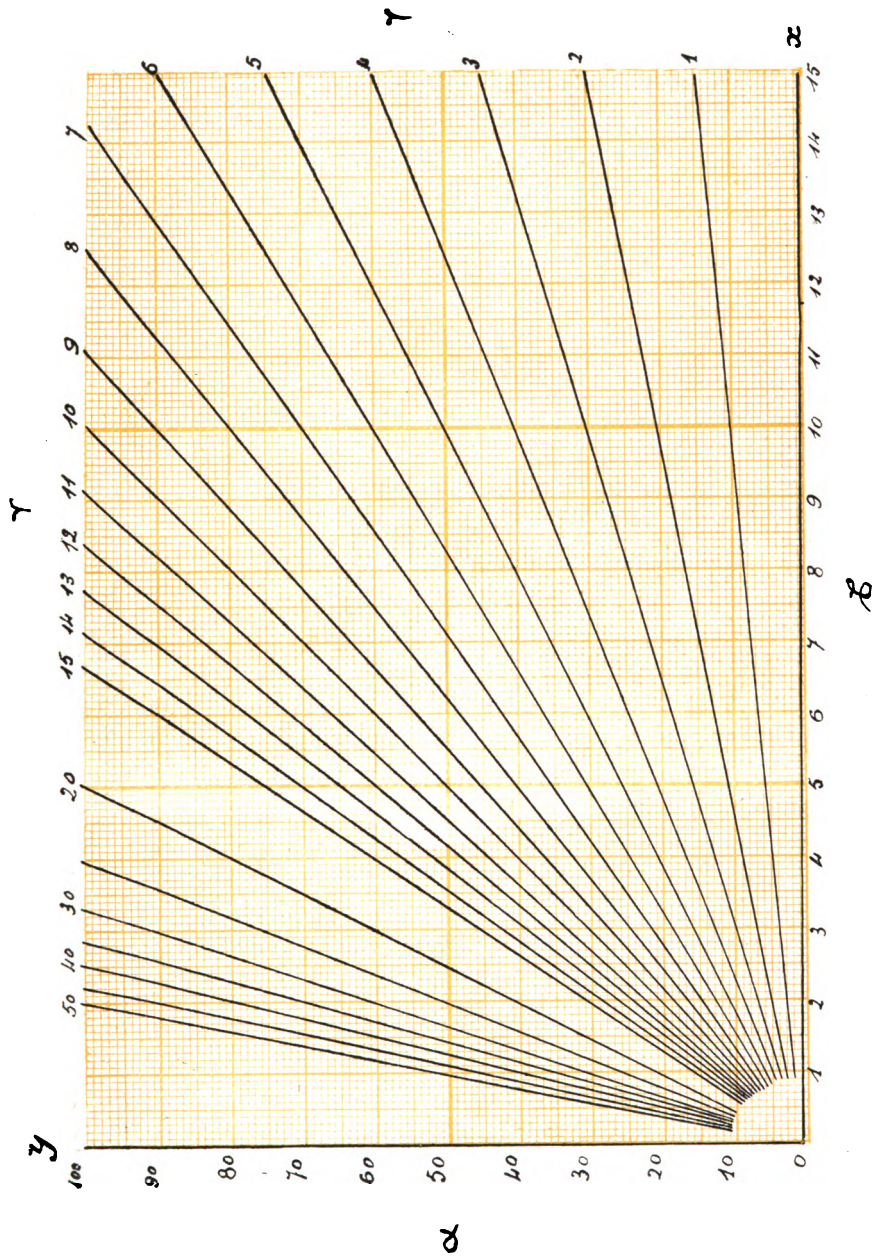


Fig. 28.—Ábaco de la multiplicación.

las equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados. El ábaco será el representado en la figura 27 (lámina V), construido con las escalas naturales OX, OY, y la serie de hipérbolas (a'').

Para ver la influencia que en la facilidad de construir el ábaco tiene la buena elección de las redes (a), supongamos en la misma ecuación [1] que se adoptan las redes

$$\left. \begin{array}{l} y = \alpha \\ x = \epsilon \end{array} \right\} (a')$$

la tercera red será entonces

$$y = x\gamma \quad (a'')$$

es decir, un haz de rectas que pasarán por el origen cuyos coeficientes angulares son los valores de γ . En la figura 28 (lámina VI) aparece este ábaco que como puede verse, es mucho más sencillo de construir y manejar que el de la figura 27.

2.º ÁBACO DE LA ELEVACIÓN A POTENCIAS. Para obtener la ecuación

$$x = y^2$$

en la que tomando logaritmos resulta

$$\log x = 2 \log y$$

escogiendo las redes

$$x = \log x$$

$$y = \log y$$

la tercera red

$$x = y^2$$

o sea un haz de rectas que pasan por el origen y cuyos coeficientes angulares son los valores de γ . Para construir este ábaco se toman en los ejes coordenados escalas logarítmicas (fig. 29) y se construye después el haz (α'') con el mismo módulo, lo que no ofrece dificultad.

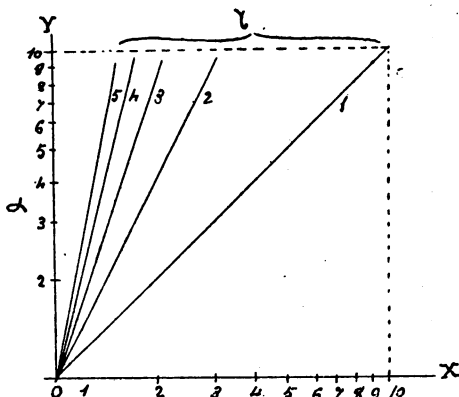


Fig. 29.

tad. Resulta, sin embargo, el ábaco mal dispuesto para su uso, por lo cual conviene aumentar el módulo de la escala α recurriendo a los multiplicadores correspondientes. Supongamos adoptado el módulo $0^m,05$; se tendría

$$0^m,05 \log \alpha = 0^m,05 \gamma \cdot 0^m,05 \log \epsilon$$

multiplicando y dividiendo por 4 el segundo miembro sería

$$0,05 \log \alpha = 0,0138 \gamma \cdot 0,20 \log \epsilon$$

obteniéndose la disposición de la figura 30 (lámina VII) mucho más conveniente que la anterior.

LÁMINA VII

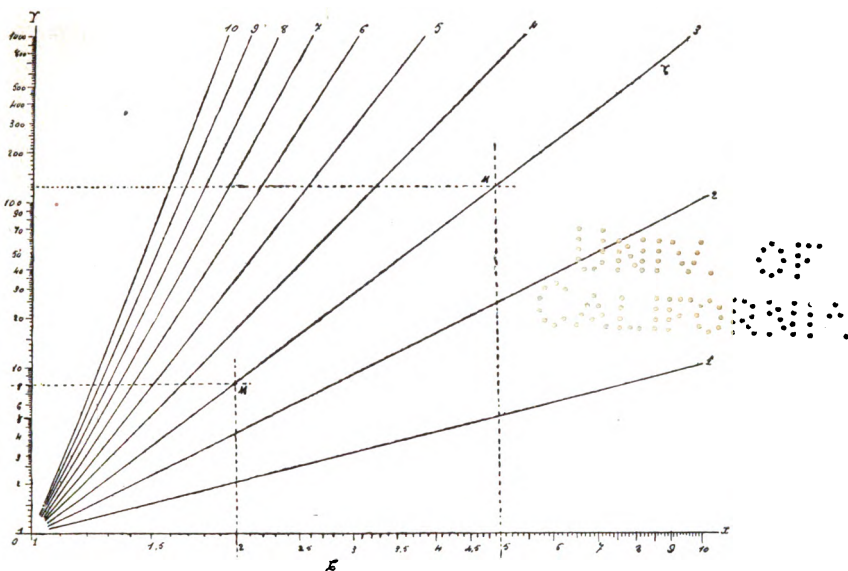
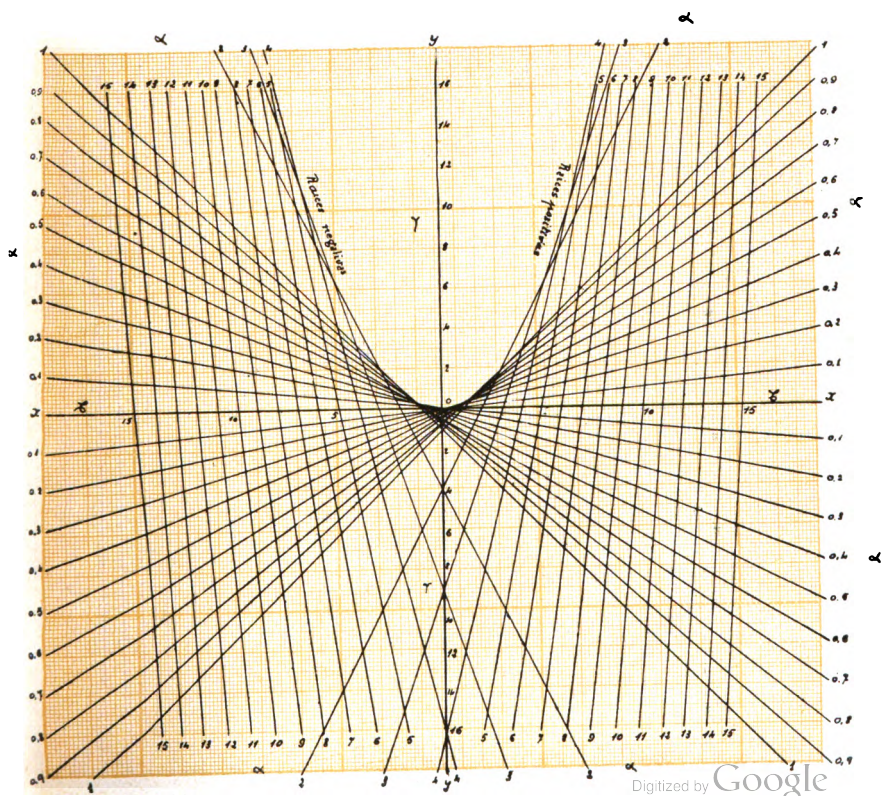


Fig. 30.—Ábaco para elevación a potencias y extracción de raíces.



3.º ABACO DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.—
Sea la ecuación propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$, la

$$\alpha^2 + \epsilon \alpha + \gamma = 0 \quad [1]$$

Escogiendo las redes

$$\left. \begin{array}{l} x = \epsilon \\ y = \gamma \end{array} \right\} \quad (a')$$

la tercera red será

$$\alpha^2 + x\alpha + y = 0 \quad \text{o sea} \quad y = -\alpha x - \alpha^2 \quad (a'')$$

que, como puede verse, está formada por una serie de rectas cuyos coeficientes angulares son los valores de α y cuyas ordenadas en el origen son los valores α^2 . En la figura 31 (lámina VII) se representa este ábaco, muy curioso, porque todas las rectas (α) tienen por envolvente una parábola (1), cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{4} x^2$$

10.—El entrecruzamiento de las paralelas a los ejes hace estos ábacos de lectura incómoda, por lo cual suele suprimirse su trazado sin más que acotar los ejes y usar para la lectura un transparente en el que se dibujan dos rectas o *índices* perpendiculares (fig. 30). Para leer en el ábaco se coloca el transparente de manera que pase uno de sus índices por la cota del eje OX, y se corre hasta que el perpendicular pase por la OY,

(1) Derivando en la ecuación (a'') se obtiene $0 = -x - 2\alpha$, y eliminando α entre esta ecuación y la (a'') se llega a la

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

leyendo después la cota de la línea en que esté el punto M, cota que será la solución del problema. Como los índices AB, CD han de ser paralelos a los ejes OX, OY, es conveniente en muchos casos usar un transparente cuadriculado para no obtener error alguno, sobre todo cuando la incógnita está representada por las cotas de uno de los ejes OX, OY.

11.—Abacos polares.—Si, como se ha indicado en el n.º 2, se refieren las ecuaciones (α) a un polo y eje polar, el procedimiento de obtener el ábaco es el mismo explicado (9), sin más que la consideración del cambio de coordenadas. En este caso las redes más sencillas que pueden suponerse son

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \alpha \\ \omega = \epsilon \end{array} \right\} \quad (a)$$

es decir, una serie de circunferencias cuyo centro es el polo, y cuyos radios son los valores de α , y una serie de rectas que pasan por el origen y cuyo ángulo con el eje polar varía con ϵ : la tercera red será como siempre el resultado de eliminar α y ϵ entre las ecuaciones (a) y la propuesta, o sea

$$f(\rho \omega \gamma) = 0 \quad (a'')$$

Sea, por ejemplo, la conocida fórmula de los triángulos rectángulos

$$\alpha = \epsilon \cos \gamma \quad [1]$$

Haciendo

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = \rho \\ \gamma = \omega \end{array} \right\} \quad (a)$$

resulta, eliminando ϵ y γ

$$\alpha = \rho \cos \omega \quad [a'']$$

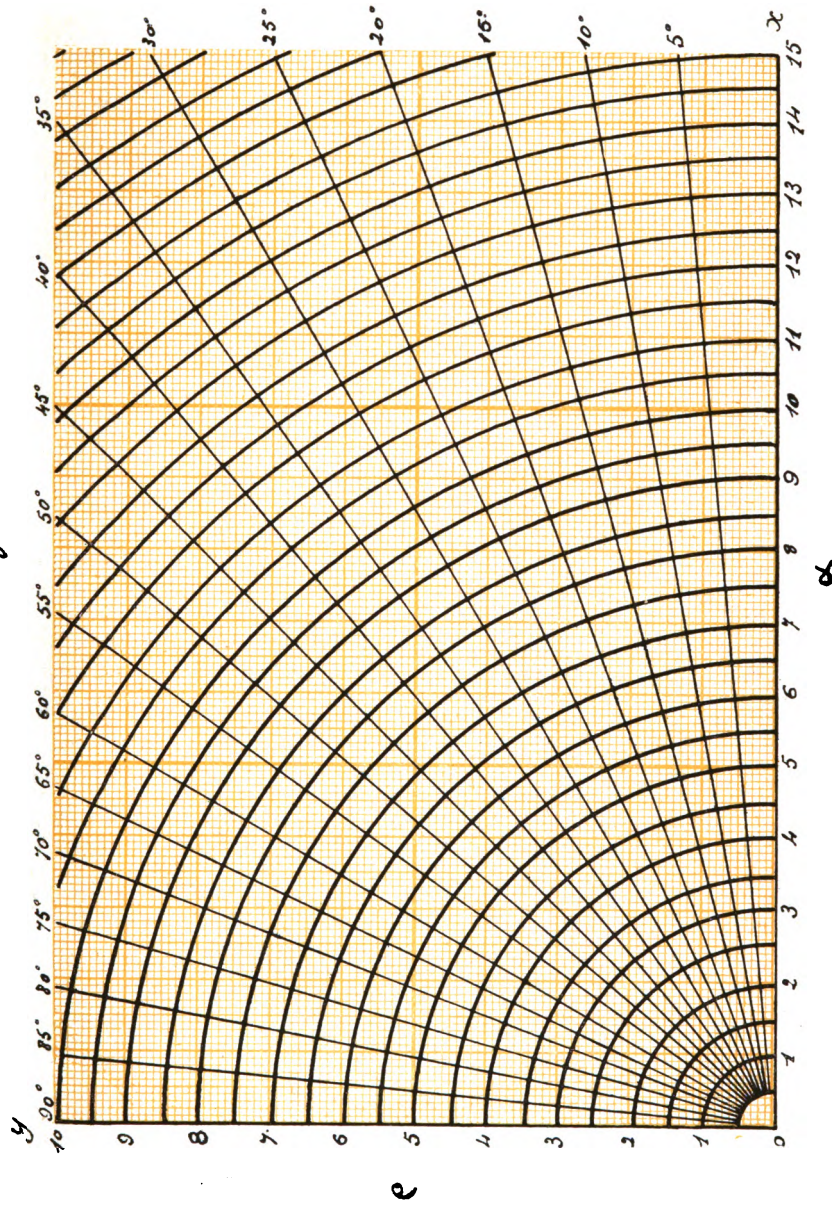


Fig. 32.—Ábaco polar de la ecuación $\alpha = \rho \cos \theta$

que es la ecuación de una serie de rectas perpendiculares al eje polar y que distan del polo los valores de α . Adoptando el mismo módulo para las tres variables, y siendo OX el eje polar (fig. 32 lámina VIII), se construirán una serie de circunferencias de radios 1, 2, 3....., cuyo centro sea el polo O, y después una serie de rectas tales, que su ángulo con el eje polar sea los valores de γ ; si después, y sobre las mismas cotas del eje polar, se levantan perpendiculares a dicho eje, tendremos construido el ábaco, cuya clave será: buscar el radio cuya cota sea el valor γ , hasta encontrar su punto de intersección con el círculo cuya cota sea ϵ , la cota de la perpendicular OX que pase por el punto anterior será el valor de α correspondiente.

De modo análogo se construirán las ábacos $\alpha = \epsilon \operatorname{sen} \gamma$ y $\alpha = \epsilon \operatorname{tang} \gamma$.

12.—Anamorfosis.—Vamos a buscar el medio de que la ecuación propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$ pueda representarse por tres redes de rectas, o al menos por tres redes de círculos, al objeto de facilitar todo lo posible las construcciones, evitando las curvas, no siempre sencillas, que pueden resultar de la eliminación de α y ϵ entre las ecuaciones [1] y (a).

a). *Anamorfosis circular.*—Sabemos que, en general, para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente un círculo referido a ejes rectangulares, es preciso que falte el término en xy , y que los coeficientes de los cuadrados de las variables sean iguales y del mismo signo, por tanto, las ecuaciones generales de tres redes de círculos serán

$$\left. \begin{aligned} f(xy\alpha) &= a_1(x^2 + y^2) + xf(\alpha) + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha) = 0 \\ f(xy\epsilon) &= a_2(x^2 + y^2) + xf(\epsilon) + y\varphi(\epsilon) + \psi(\epsilon) = 0 \\ f(xy\gamma) &= a_3(x^2 + y^2) + xf(\gamma) + y\varphi(\gamma) + \psi(\gamma) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

en que a_1, a_2, a_3 son constantes y, f, φ, ψ , funciones diversas de las variables, que para mayor sencillez re-

presentaremos por los subíndices 1, 2, 3. Si eliminando x e y entre estas ecuaciones, la propuesta $F(\alpha\beta\gamma) = 0$ puede identificarse con la resultante de esta eliminación, será posible representarla por el sistema de redes (a).

Para hacer esta operación, Mr. D'Ocagne elimina primero $x^2 + y^2$ entre las ecuaciones (a) tomadas dos a dos, lo que da por resultado tres ecuaciones de la forma

$$(f_n a_m - f_m a_n)x + (\varphi_n a_m - \varphi_m a_n)y + (\psi_n a_m - \psi_m a_n) = 0 \quad [b]$$

representando $n m$ las diversas combinaciones de los subíndices 1, 2, 3, etc.

Sumando las tres ecuaciones [b] multiplicadas respectivamente, primero por $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ y después por $f_1 f_2 f_3$ se llega a las dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{array} \right| x - \left| \begin{array}{ccc} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{array} \right| y - \left| \begin{array}{ccc} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right. \quad [c]$$

Si, por otra parte, se multiplican las tres ecuaciones dadas respectivamente por $f_2 \varphi_3 - f_3 \varphi_2$, $f_3 \varphi_1 - f_1 \varphi_3$ y $f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1$, y se suman los resultados, se llega a la

$$\left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{array} \right| (x^2 + y^2) + \left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{array} \right| = 0 \quad [d]$$

Y eliminando, por último, x e y entre las [c] y la [d] se llega a la resultante buscada

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{ccc} f_1 & a_1 & \varphi_1 \\ f_2 & a_2 & \varphi_2 \\ f_3 & a_3 & \varphi_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{ccc} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{array} \right| = 0$$

Llamando ahora D al determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

y $D_f D_\varphi D_\psi$ al resultado de sustituir en D , las f, φ o ψ por las a , la resultante Δ podrá expresarse abreviadamente por

$$\Delta = D_f^2 + D_\varphi^2 + D_\psi^2 = 0 \quad [2]$$

que debe identificarse con la $F(\alpha\epsilon\gamma) = 0$ para que ésta pueda representarse por las tres redes de círculos.

Cuando $a_1 = a_2 = 0$, dos de las redes (a) son de rectas y la ecuación [2] se convierte en la

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}^2 D = 0 \quad [3]$$

y, finalmente, cuando $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, las tres redes son rectilíneas y la [2] se convierte en

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [4]$$

Ejemplos.—1.º Sea la ecuación $F(\alpha\epsilon\gamma) = 0$ la

$$r = \frac{f^2 + \frac{c^2}{4}}{2f} \quad \text{o sea} \quad f^2 + \frac{c^2}{4} - 2fr = 0 \quad [1]$$

que sirve para hallar el radio de un segmento circular AMB (fig. 33) en función de la flecha $f = MN$ y de la

cuerda $c = AB$. Haciendo $f = \alpha$, $\frac{c}{2} = \epsilon$, $r = \gamma$ la [1] se escribirá

$$\alpha^2 + \epsilon^2 - 2\gamma\alpha = 0 \quad [1]$$

resultando, por tanto, que $f_1 \varphi_1 \psi_1$ serán funciones de α ,

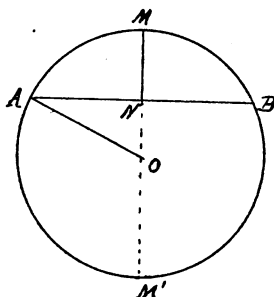


Fig. 33.

$f_2 \varphi_2 \psi_2$ de ϵ y $f_3 \varphi_3 \psi_3$ de γ . Si en la ecuación [3] anterior suponemos

$$\begin{array}{lll} f_1 = 1 & \varphi_1 = 0 & \psi_1 = -\alpha \\ f_2 = 0 & \varphi_2 = 1 & \psi_2 = -\epsilon \\ f_3 = -2\gamma & \varphi_3 = 0 & \psi_3 = 0 \end{array}$$

se convertirá en

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & -\epsilon \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -\epsilon \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\epsilon \\ -2\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que haciendo operaciones se identifica en absoluto con

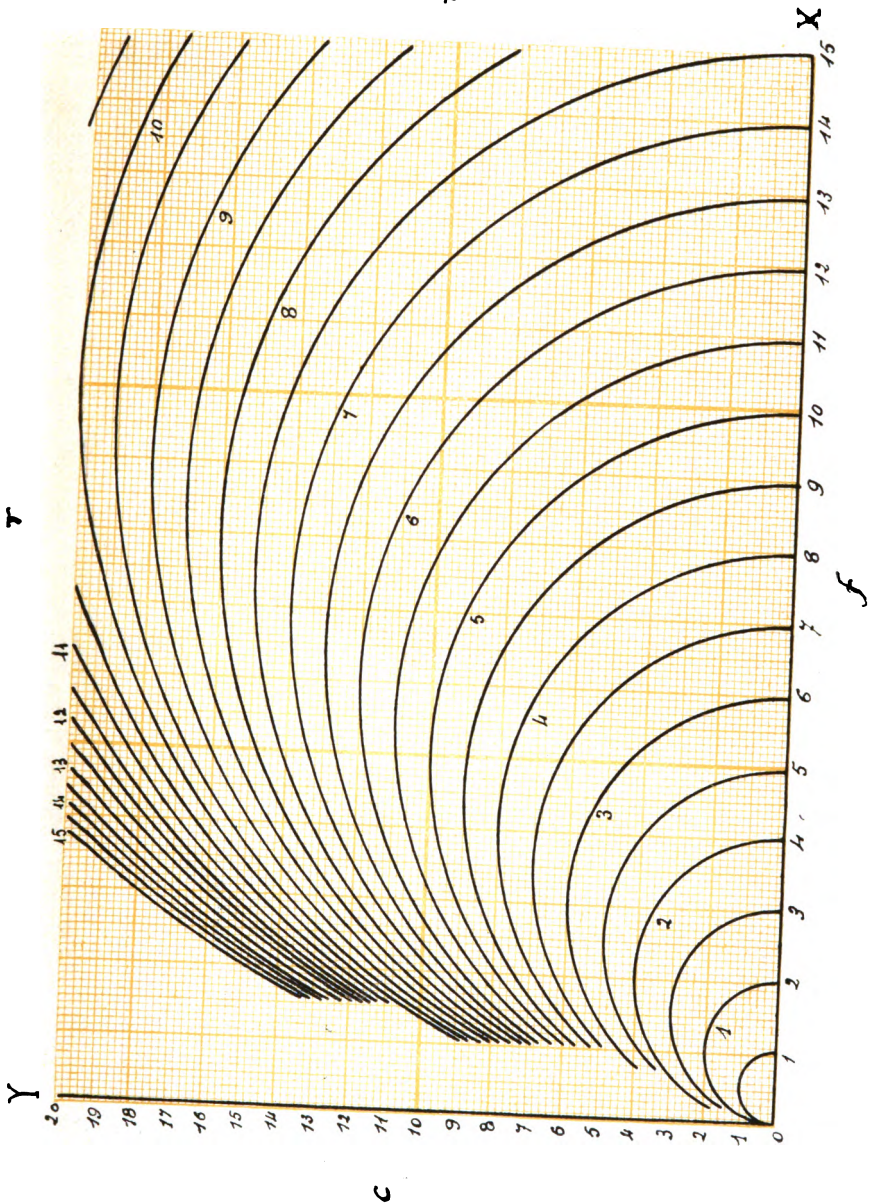


Fig. 84. — Ábaco de la ecuación $r = \frac{f^3 + \frac{r^2}{4}}{2f}$

la propuesta [1]. Esta será, por tanto, representable por las redes (α), que para el caso son

$$f(xy\alpha) = 0(x^2 + y^2) + x \times 1 + y \times 0 - \alpha = 0$$

o sea

$$x = \alpha, \text{ es decir, } x = f$$

$$f(xy\epsilon) = 0(x^2 + y^2) + x \times 0 + y \times 1 - \epsilon = 0$$

o sea

$$y = \epsilon, \text{ es decir, } y = \frac{c}{2}$$

$$f(xy\gamma) = 1(x^2 + y^2) - x \times 2\gamma + y \times 0 + 0 = 0$$

o sea

$$x^2 + y^2 - 2\gamma x = 0, \text{ es decir, } f^2 + \frac{c^2}{4} - 2rf = 0.$$

El ábaco (fig. 34, lámina IX) estará, pues, constituido por dos redes de paralelas a los ejes coordenados rectangulares OX, OY, y una serie de círculos (representativos de la variable r) cuyos centros están todos sobre el eje OX a distancias del origen $X \Rightarrow r$, y cuyos radios son también $\rho = r$, por lo cual pasan todos por dicho origen O.

La clave del ábaco es la misma conocida, con la particularidad de que, cuando la incognita es f , la recta paralela al eje OX, cuya cota es c_1 , puede cortar en dos puntos (caso de la figura), ser tangente, o no cortar a la circunferencia cuya cota es el valor r_1 , dado de r , resul-

tando, por lo tanto, dos una o ninguna solución para f . Esto es consecuencia natural de la forma de la ecuación [1] representada; despejando, en efecto, f , se tiene

$$f = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$$

donde se ve que cuando $r > \frac{c}{2}$, f tiene dos valores reales y positivos (MN y NM', fig. 33); cuando $r = \frac{c}{2}$ hay una solución, $f = r$, es decir, se trata de un semicírculo, y que cuando $r < \frac{c}{2}$ f tiene valores imaginarios, es decir, no hay solución.

2.º Otro caso muy sencillo de representación por rectas y círculos es la ecuación

$$\alpha^2 + \epsilon^2 = \gamma^2 \quad [1]$$

de Pitágoras, en la que se ve en seguida puede representarse por un ábaco formado de paralelas a los ejes

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \epsilon \end{aligned}$$

y una serie de circunferencias

$$x^2 + y^2 = \gamma^2$$

cuyo centro es el origen y cuyos radios son los valores de γ (fig. 35, lámina X).

b). *Anamorfosis rectilínea*.—Es la más empleada y sencilla, y, según hemos visto anteriormente, si la pro-

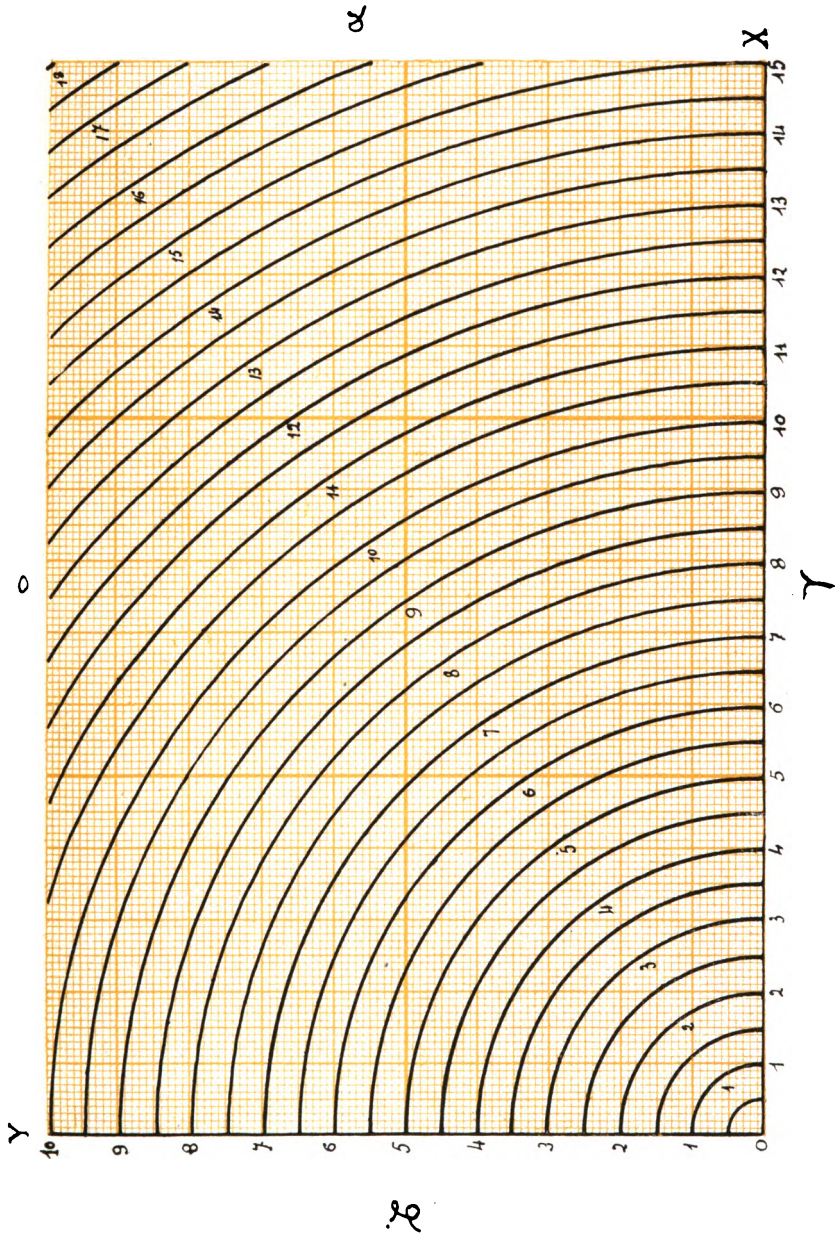


Fig. 85.—Ábaco de la ecuación $\alpha^2 = \gamma^2 + \gamma^2$

puesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$ puede identificarse con el desarrollo del determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [4]$$

aquella será representable por las tres redes de rectas

$$\left. \begin{aligned} f_1 x + \varphi_1 y + \psi_1 &= 0 \\ f_2 x + \varphi_2 y + \psi_2 &= 0 \\ f_3 x + \varphi_3 y + \psi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Si, además, multiplicamos el determinante D por el

$$d = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \geq 0$$

compuesto de 9 parámetros, que cumplan con la condición $d \geq 0$, obtendremos una matriz de la forma

$$\delta = Dd = \begin{vmatrix} \lambda_1 f_1 + \mu_1 \varphi_1 + \nu_1 \psi_1 & \lambda_2 f_1 + \mu_2 \varphi_1 + \nu_2 \psi_1 & \lambda_3 f_1 + \mu_3 \varphi_1 + \nu_3 \psi_1 \\ \lambda_1 f_2 + \mu_1 \varphi_2 + \nu_1 \psi_2 & \lambda_2 f_2 + \mu_2 \varphi_2 + \nu_2 \psi_2 & \lambda_3 f_2 + \mu_3 \varphi_2 + \nu_3 \psi_2 \\ \lambda_1 f_3 + \mu_1 \varphi_3 + \nu_1 \psi_3 & \lambda_2 f_3 + \mu_2 \varphi_3 + \nu_2 \psi_3 & \lambda_3 f_3 + \mu_3 \varphi_3 + \nu_3 \psi_3 \end{vmatrix} \quad [5]$$

que contendrá, evidentemente, todos los ábacos posibles de la propuesta, puesto que toda solución de [5] lo es de [4] y, por tanto, de $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$.

13.—Ábacos de redes rectilíneas y ábacos correlativos de puntos alineados: condiciones para que una ecuación dada sea representable por este procedimiento.—Veamos las modificaciones que pueden introducirse para hacer los ábacos más sencillos posibles, y, desde luego, en la hipótesis $d = 1$.

1.^a Que dos de las rectas (α) sean haces de paralelas a los ejes coordenados (fig. 36). En este caso, debe tenerse simultáneamente, siendo k y r constantes,

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 & \varphi_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 & \varphi_2 &= r_2 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & \psi_1 \\ 0 & r_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} r_2 & \psi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} 0 & \psi_1 \\ r_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad [5]$$

2.^a Que, ocurriendo lo anterior, las rectas de la ter-

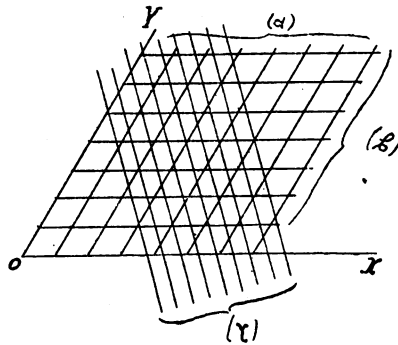


Fig. 36.

cera red pasen por el origen (fig. 37); esto introduce la nueva condición $\psi_3 = 0$, y, por tanto,

$$D_2 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & \psi_1 \\ 0 & r_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} 1 & \psi_2 \\ \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} 0 & \psi_1 \\ r_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = -k_1 \varphi_3 \psi_2 - r_2 f_3 \psi_1 = 0 \quad [6]$$

3.^a Que siendo dos de las rectas (α) haces de paralelas a los ejes coordenados, el tercer haz sea de rectas

que formen ángulos iguales con dichos ejes (fig. 38). En

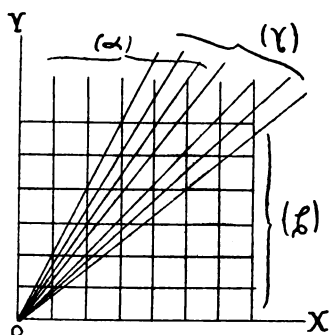


Fig. 37.

tal caso, estas rectas serán perpendiculares a la bisectriz

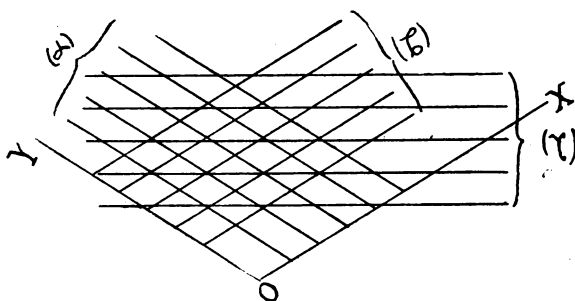


Fig. 38.

del ángulo de los ejes, cuya ecuación es, como sabemos,

$$x = y$$

y deberán ser sus ecuaciones de la forma

$$y = -x + m$$

lo que introduce las condiciones

$$f_3 = k_3 \quad \varphi_3 = r_3$$

y, por tanto,

$$D_3 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & \psi_1 \\ 0 & r_2 & \psi_2 \\ k_3 & r_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} r_2 & \psi_2 \\ r_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} 0 & \psi_1 \\ r_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad [7]$$

4.^a Un haz de paralelas a uno de los ejes, y dos haces de radiantes dirigidos en sentido contrario (figu-

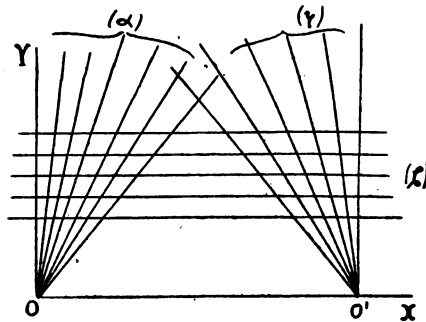


Fig. 39.

ra 39). En tal caso, llamando m a la magnitud OO' , la ecuación del haz (γ) será de la forma

$$(x + m) + ya = 0$$

Y, suponiendo que el primer haz de rectas (α) es el paralelo a uno de los ejes, al X por ejemplo, tendremos en D las siguientes condiciones generales

$$f_1 = 0 \quad \varphi_1 = r_1 \quad \psi_2 = 0 \quad \frac{\psi_3}{f_3} = m$$

o las más sencillas

$$\begin{array}{lll} f_1 = 0 & \varphi_1 = r_1 & \text{»} \\ f_2 = k_2 & \text{»} & \psi_2 = 0 \\ f_3 = k_3 & \text{»} & \psi_3 = m \end{array}$$

que llevadas a [4] le convierten en

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & \psi_1 \\ k_2 & \varphi_2 & 0 \\ k_3 & \varphi_3 & m \end{vmatrix} = 0 \quad [8]$$

5.º *Abacos de puntos alineados.*—Acabamos de ver (n.º 12) que la condición (5) $\delta = 0$ contiene todos los ábacos posibles de la ecuación propuesta $F(\alpha\epsilon\gamma) = 0$ siempre que pueda hacerse la identificación entre ambas. Escribiendo para mayor sencillez el determinante δ bajo la forma

$$\delta = \begin{vmatrix} F_1 & \Phi_1 & \Psi_1 \\ F_2 & \Phi_2 & \Psi_2 \\ F_3 & \Phi_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

en que F, Φ, Ψ , tienen análoga significación que f, φ, ψ , se tendrán las tres redes de rectas

$$Fx + \Phi y + \Psi = 0 \quad (\alpha)$$

dando a F, Φ y Ψ los subíndices 1, 2, 3, respectivamente.

Consideremos ahora las tres curvas acotadas, referidas a los mismos ejes

$$[\alpha] \quad \begin{cases} x = \frac{F_1}{\Psi_1} \\ y = \frac{\Phi_1}{\Psi_1} \end{cases} \quad [\epsilon] \quad \begin{cases} x = \frac{F_2}{\Psi_2} \\ y = \frac{\Phi_2}{\Psi_2} \end{cases} \quad [\gamma] \quad \begin{cases} x = \frac{F_3}{\Psi_3} \\ y = \frac{\Phi_3}{\Psi_3} \end{cases} \quad (6)$$

y una recta MN que pasa por tres puntos de cotas $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1$, tales que sean una solución de la propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$.

Si llamamos $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$, a las coordenadas de los puntos cuyas cotas son $\alpha_1, \epsilon_1, \gamma_1$, la recta que pasa por $(x_1 y_1) (x_2 y_2)$ tendrá por ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad [m]$$

o sea

$$(x_2 - x_1) y - (y_2 - y_1) x + (x_2 - x_1) (y_1 - x_1) = 0$$

y la que pasa por los puntos $(x_1 y_1) (x_3 y_3)$ será

$$y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} (x - x_1) \quad [n]$$

o sea

$$(x_3 - x_1) y - (y_3 - y_1) x + (x_3 - x_1) (y_1 - x_1) = 0.$$

Para que las rectas (m) y (n) sean idénticas, es decir, se confundan en una sola, basta igualar sus coeficientes, lo que da

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_1 \quad \text{es decir,} \quad x_2 = x_3 \quad \text{o sea} \quad \frac{F_2}{\Psi_2} = \frac{F_3}{\Psi_3}$$

$$y_2 - y_1 = y_3 - y_1 \quad \quad \quad \gg \quad y_2 = y_3 \quad \quad \gg \quad \frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \frac{\Phi_3}{\Psi_3}$$

o, sea las condiciones

$$F_2 \Psi_3 - \Psi_2 F_3 = \begin{vmatrix} F_2 & \Psi_2 \\ F_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Phi_2 \Psi_3 - \Psi_2 \Phi_3 = \begin{vmatrix} \Phi_2 & \Psi_2 \\ \Phi_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

que verifican precisamente el determinante $\Delta = 0$. Luego este determinante expresa, no sólo la condición para que las tres rectas (a) se corten en un punto, sino también la de que los tres puntos α, ϵ, γ , de las curvas $[\alpha], [\epsilon], [\gamma]$ están en línea recta, o, lo que es igual, que, si la propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$ puede identificarse con Δ , dicha ecuación será representable por las tres curvas acotadas $[\alpha], [\epsilon]$ y $[\gamma]$.

Este es el principio general de los puntos *correlativos* de Mr. d'Ocagne y de sus ábacos de puntos alineados o *nomogramas*; a cada recta del sistema (a) corresponde un punto del sistema (b) y recíprocamente, pudiendo llegarse al mismo resultado por la consideración de las coordenadas *tangenciales*. En efecto, si al representar la propuesta por las tres redes de rectas

$$\left. \begin{aligned} F_1 x + \Phi_1 y + \Psi_1 &= 0 \\ F_2 x + \Phi_2 y + \Psi_2 &= 0 \\ F_3 x + \Phi_3 y + \Psi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [a]$$

observamos que las coordenadas tangenciales de estas rectas son, respectivamente,

$$[\alpha] \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{F_1}{\Psi_1} \\ v &= \frac{\Phi_1}{\Psi_1} \end{aligned} \right. \quad [\epsilon] \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{F_2}{\Psi_2} \\ v &= \frac{\Phi_2}{\Psi_2} \end{aligned} \right. \quad [\gamma] \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{F_3}{\Psi_3} \\ v &= \frac{\Phi_3}{\Psi_3} \end{aligned} \right.$$

y recordamos que si haciendo la eliminación de α entre las ecuaciones $[\alpha]$, de ϵ entre las $[\epsilon]$ y de γ entre las $[\gamma]$ se llega a relaciones de primer grado entre u y v , de la forma

$$\left. \begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 &= 0 \\ a_2 u + b_2 v + c_2 &= 0 \\ a_3 u + b_3 v + c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

cada una de estas ecuaciones representa *un punto* cuyas coordenadas cartesianas son $x = \frac{a_1}{c_1}$ $y = \frac{b_1}{c_1}$ etc., y que además, será común a las rectas (a), es evidente que las series de puntos que contienen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} F_1 u + \Phi_1 v + \Psi_1 &= 0 \\ F_2 u + \Phi_2 v + \Psi_2 &= 0 \\ F_3 u + \Phi_3 v + \Psi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [b]$$

serán comunes a las rectas (a) y tendrán por coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} [\alpha] \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{F_1}{\Psi_1} \\ y &= \frac{\Phi_1}{\Psi_1} \end{aligned} \right. & [\beta] \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{F_2}{\Psi_2} \\ y &= \frac{\Phi_2}{\Psi_2} \end{aligned} \right. & [\gamma] \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{F_3}{\Psi_3} \\ y &= \frac{\Phi_3}{\Psi_3} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Fácil es ver ahora que la condición necesaria para que las tres rectas (a) tengan un punto común, o sea

$$\delta = \begin{vmatrix} F_1 & \Phi_1 & \Psi_1 \\ F_2 & \Phi_2 & \Psi_2 \\ F_3 & \Phi_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

es exactamente la misma, necesaria para que tres puntos de los que representan las ecuaciones [b] estén en línea recta.

Intentemos ahora, como lo hemos hecho anteriormente, buscar los ábacos más sencillos de puntos alineados, y supongamos como antes, para mayor sencillez, $d = 1$, es decir, que consideramos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

y las curvas

$$[\alpha] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_1}{\phi_1} \\ y = \frac{\varphi_1}{\psi_1} \end{array} \right. \quad [\beta] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_2}{\phi_2} \\ y = \frac{\varphi_2}{\psi_2} \end{array} \right. \quad [\gamma] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_3}{\phi_3} \\ y = \frac{\varphi_3}{\psi_3} \end{array} \right.$$

resultarán los siguientes casos, que podremos añadir a los ya estudiados.

5.º Que una de las curvas $[\alpha]$, $[\beta]$ o $[\gamma]$ sea una recta: sea, por ejemplo, la $[\gamma]$. Para ello ha de verificarse, eliminando γ

$$ax + by + c = 0$$

siendo a , b y c constantes, lo que equivale a suponer constantes las relaciones

$$\frac{f_3}{\phi_3} \quad \text{y} \quad \frac{\varphi_3}{\psi_3}.$$

Si fuera $\phi_3 = n = \text{constante}$ y $f_3 = 0$, la recta $[\gamma]$ es el eje de las Y; si, por el contrario, es $\varphi_3 = 0$, la recta será el eje de las X; cuando $\phi_3 = n$ y $f_3 = m$ la recta es paralela al eje de las Y, siéndolo al eje de las X cuando $\varphi_3 = m$. Además, si $\phi_3 = 0$, se tiene

$$x = y = \infty$$

y entonces la recta $[\gamma]$ está en el infinito y se reduce a un punto situado en dicha región; finalmente, si son a un tiempo $f_3 = 0$ $\varphi_3 = 0$, la recta $[\gamma]$ se convertirá en un punto que es el origen de coordenadas.

Llevando todas estas condiciones al determinante $D = 0$, resultará

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & \varphi_3 & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Dos curvas y el eje de las Y}$$

$$\text{Dos curvas y el eje de las X, } D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & n \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ m & \varphi_3 & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Dos curvas y una paralela al eje de las Y}$$

$$\text{Dos curvas y una paralela al eje de las X, } D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & m & n \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Dos curvas y un punto en el infinito}$$

$$\text{Dos curvas y el origen de coordenadas } D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

7.º Que dos de las curvas, las $[\epsilon]$ y $[\gamma]$, por ejemplo, sean rectas.

Se dirá del sistema $[\epsilon]$ lo que hemos dicho del $[\gamma]$, siendo de anotar el caso en que las dos escalas $[\epsilon]$ y $[\gamma]$ sean paralelas. Entonces debe ocurrir

$$\frac{f_2}{\varphi_2} = \frac{f_3}{\varphi_3} = \text{constante,} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} f_2 = m \varphi_2 \\ f_3 = m \varphi_3 \end{cases}$$

y se tendrá

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \frac{1}{m} f_2 & \psi_2 \\ f_3 & \frac{1}{m} f_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8.º Que las tres curvas $[\alpha]$ $[\epsilon]$ $[\gamma]$ sean rectas. Se dirá entonces de los tres sistemas lo que hemos dicho del $[\gamma]$, siendo también notable el caso en que las tres sean paralelas. Entonces se verificará

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{1}{m} & f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \frac{1}{m} & f_2 & \psi_2 \\ f_3 & \frac{1}{m} & f_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, además, las tres son paralelas al eje Y o al eje X, será

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & m \\ 0 & \varphi_2 & n \\ 0 & \varphi_3 & r \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & m \\ f_2 & 0 & n \\ f_3 & 0 & r \end{vmatrix} = 0.$$

Cuando simultáneamente se tenga $f = 0$ y $\varphi = 0$ en cada línea del determinante D, el nomograma se reduce a un punto, que será el origen de coordenadas, y cuando $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ el nomograma se reduce también a un punto situado en el infinito.

En este último caso, sin embargo, no debe creerse que la ecuación propuesta es imposible de representar por un ábaco de puntos alineados, pues recurriendo al determinante $\delta = D.d$, se ve que, aun siendo simultáneamente $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$, puede haber un nomograma definido por tres escalas de la forma

$$x = \frac{\lambda_1 f + \mu_1 \varphi}{\lambda_3 f + \mu_3 \varphi} \quad y = \frac{\lambda_2 f + \mu_2 f}{\lambda_3 f + \mu_3 \varphi}.$$

14.—Para ver ahora la correlación entre los ábacos y los nomogramas, compararemos los casos 1, 2 y 4 de rectas acotadas con las formas de puntos alineados.

Todo sistema de paralelas a uno de los ejes está definido por la condición $f = k$, $\varphi = 0$, o recíprocamente, que en puntos alineados significa una escala cuyo soporte es uno de los ejes.

Todo sistema de radiantes que no pasa por el origen, requiere la condición $\phi = m$, que nos da en puntos alineados, una escala rectilínea; esta escala será paralela a uno de los ejes coordenados cuando al mismo tiempo sean $f = 0$, o $\varphi = 0$. Cuando $\phi = 0$ todos los puntos correlativos del haz de radiantes que pasan por el origen, están en el infinito; hay entonces que cambiar de ejes coordenados para volver a la forma $\phi = m$ anterior, lo que se consigue sin gran dificultad en el determinante D, multiplicándole por un número conveniente de parámetros.

Por último, todo sistema de rectas perpendiculares a la bisectriz de los ejes, definido, como sabemos, por las condiciones $f = k$ y $\phi = r$, da en puntos alineados una paralela al eje de las Y.

Falta ahora saber, una vez conocidas estas relaciones analíticas, cómo puede deducirse *geométricamente* un nomograma, es decir, un ábaco de puntos alineados, de otros de rectas acotadas.

Para ello, supongamos trazado un ábaco definido por las tres redes de rectas (α)

$$fx + \varphi y + \psi = 0 \quad (\alpha)$$

y sea MN (fig. 40) una recta cualquiera del ábaco, perteneciente al sistema (α), por ejemplo, y referida a los ejes cartesianos OX, OY. Sus coordenadas tangenciales son

$$u = \frac{f_1}{\phi_1} = \frac{1}{OM} \quad v = \frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{1}{ON}$$

Haciendo del mismo modo $v'' = 0$, resultará

$$u'' = -\frac{\psi_1}{f_1}$$

por lo cual, si $-\frac{\psi_1}{f_1} = AO_1$, la recta BO_1 será la de coordenadas $(u'' 0)$ y el punto C de su intersección con la AR, el correlativo que buscamos de la recta MN.

Puede ahorrarse la construcción de los ejes AU, BV hallando directamente los valores $x = OH$ y $y = HC$ de las coordenadas cartesianas del punto C en función de $OA = OB = d$, AQ y BR. Se tiene, en efecto, en los triángulos semejantes AQB, CHB y ABR, ACH

$$\left. \begin{aligned} y &= (d+x) \frac{BR}{2d} \\ y &= (d-x) \frac{AQ}{2d} \end{aligned} \right\} (d+x) BR = (d-x) AQ$$

de donde

$$x = -d \frac{BR - AQ}{BR + AQ} = +d \frac{\frac{\psi_1}{\varphi_1} - \frac{\psi_1}{f_1}}{\frac{\psi_1}{\varphi_1} + \frac{\psi_1}{f_1}} = -d \frac{\varphi_1 - f_1}{\varphi_1 + f_1}$$

y substituyendo este valor en cualquiera de los de y resulta $y = -\frac{\psi_1}{\varphi_1 + f_1}$.

Las fórmulas anteriores pueden, por tanto, considerarse como las de transformación de ábacos en nomogramas y pueden ser muy útiles en la práctica, como tendremos ocasión de ver.

Cuando MN pertenece a un haz de paralelas al

eje OX, por ejemplo, se tiene, como sabemos, $f = 0$, $\varphi = k$ y, por tanto, $x = d$ $y = -\frac{\psi_1}{k}$, es decir, que el lugar geométrico o *soporte* de los puntos C es el eje BV, y del mismo modo se vería que el eje AU representa la recta correlativa de un haz de paralelas al cartesiano OY.

Cuando MN pertenece a un haz de radiantes que pasa por el origen O, se tiene $\varphi = 0$, y, por tanto, $x = -d \frac{\varphi_1 - f_1}{\varphi_1 + f_1}$ $y = 0$, es decir, la recta AB. Si el haz de radiantes no pasa por el origen, y su punto central tiene por coordenadas $x_1 = a$ $y_1 = b$, trasladando el origen O de coordenadas a dicho punto (a b), conservando el paralelismo de los ejes, estaremos en el caso anterior y la recta correlativa del radiante será el nuevo eje X' de coordenadas.

Cuando MN pertenece a un haz de paralelas cualesquiera, la relación $\frac{\varphi}{f} = k$ es constante, y se tiene

$$x = -d \frac{k-1}{k+1} \quad y = -\frac{\frac{\psi}{f}}{k+1}$$

es decir, una paralela al eje OY.

Vemos pues: 1.º Que al ábaco de la figura 36 corresponde un nomograma formado (fig. 41) por dos paralelas acotadas AU y VB, y una tercera recta $[\gamma]$ siempre que el sistema (γ) sea de paralelas: si no lo fuese el soporte $[\gamma]$ sería una curva.

2.º Que al ábaco de la figura 37 corresponde un nomograma formado por dos paralelas acotadas (figura 42) AU BV, y una tercera recta AB que formará con las AU BV un ángulo igual al de los ejes coordinados OX OY.

3.º Que al ábaco de la figura 38 corresponde un nomograma análogo al de la figura 41.

4.º Que al ábaco de la figura 39 corresponden tres rectas acotadas (fig. 40), el eje BV, el OX y este último eje con la acotación $[\gamma]$ además de la $[\epsilon]$, sin más diferencia que los orígenes de las dos graduaciones $[\epsilon]$ y $[\gamma]$ están en puntos diferentes del eje OX.

15.—Como aplicación de todo lo dicho vamos a ocuparnos ahora de la representación nomográfica de di-

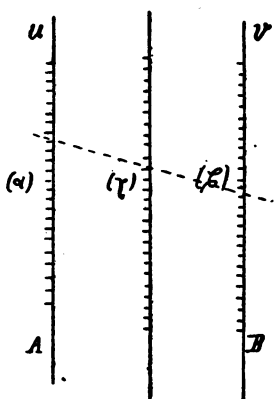


Fig. 41.

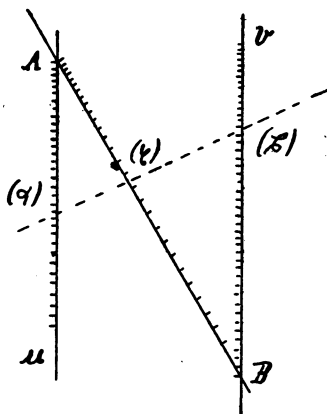


Fig. 42.

versos tipos de ecuaciones de tres variables que son muy frecuentes en la práctica.

16.—Forma $f_1 + f_2 = f_3$. Es el caso en que la ecuación propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$ presenta sus tres variables α, ϵ, γ , como funciones de igual característica f , pudiéndose además separar las variables como indica la notación.

El determinante D que se identifica con la propuesta es de la forma

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & 0 & 1 \\ f_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad [b]$$

del que vamos a ver los ábacos y nomogramas más sencillos que pueden deducirse.

a). *Abacos*.—Puede construirse un ábaco de la forma [7] (fig. 38), constituido por las redes de rectas

- (α) $0 + y + f_1 = 0 \dots y = -f_1$ paralelas al eje OX.
- (β) $x + 0 + f_2 = 0 \dots x = -f_2$ paralelas al eje OY.
- (γ) $x + y + f_3 = 0 \dots$ haz de paralelas de igual inclinación con respecto a los ejes coordenados.

A estos ábacos, cuando el ángulo de los ejes es de 120° , se les llama *exagonales*, porque si las redes (α)

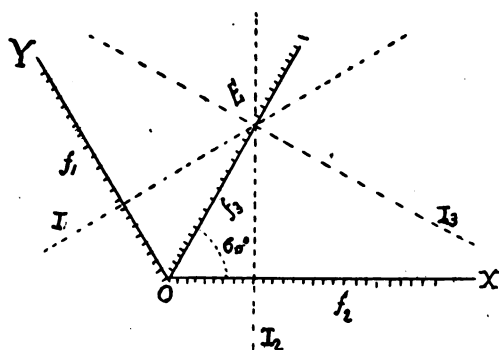


Fig. 43.

y (β) no se dibujan, sustituyéndolas por los ejes OY, OX acotados con arreglo a los valores f_1 , f_2 y el haz [γ] se sustituye por la bisectriz OE (fig. 43) del ángulo de los ejes, también acotada con arreglo a los valores

$$\varepsilon = f_3 \cos 60^\circ$$

habremos evitado el trazar las tres redes de paralelas, y podremos leer en el ábaco sin más que trazar en un papel transparente tres índices, I_1 , I_2 , I_3 , respectivamente, perpendiculares a las escalas f_1 , f_2 y f_3 , que, como puede verse, tienen la posición de las diagonales de un exágono. En efecto, colocando los índices I_1 , I_2 de modo que, siendo perpendiculares a las escalas respectivas, pasen por las cotas $[\alpha]$ $[\epsilon]$ de f_1 , f_2 , el tercer índice pasará por la cota $[\gamma_1]$ de la solución de $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$.

Ejemplo.—El área de la elipse tiene por expresión

$$S = \frac{\pi}{4} D d$$

siendo D y d sus ejes. Tomando logaritmos se tiene

$$\log S = \log \frac{\pi}{4} + \log D + \log d$$

ecuación comprendida dentro del tipo que consideramos, y cuyo ábaco exagonal puede construirse (fig. 44, lámina XI) con las escalas (adoptando el módulo 0,05)

$[\alpha]$	$f_1 = 0^{\text{m}},05 \log S$		según OY
$[\epsilon]$	$f_2 = 0^{\text{m}},05 [1,8957 + \log D]$		según OX
$[\gamma]$	$f_3 = 0^{\text{m}},05 \log d$		según OE.

b) *Nomogramas.*—Según hemos visto anteriormente (n.º 14), a los ábacos contruídos corresponden nomogramas formados por tres escalas paralelas. En efecto, del determinante [5] se deduce, sumando las columnas segunda y tercera, el

$$D' = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 1 \\ f_2 & 0 & 1 \\ f_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

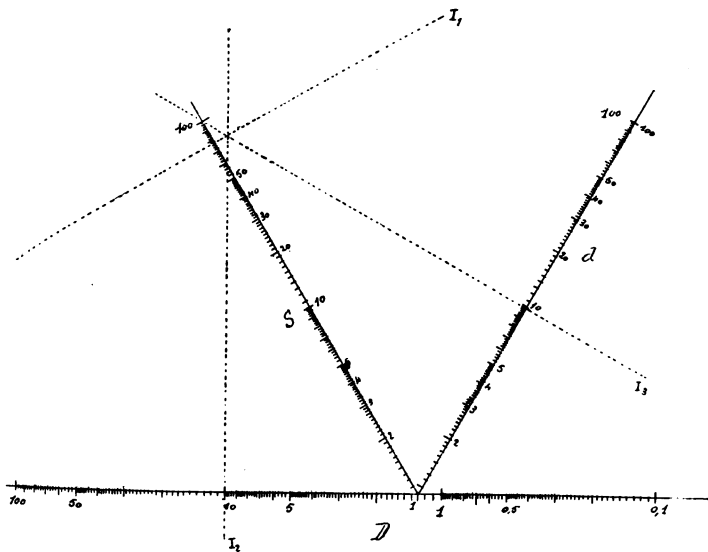


Fig. 44.—Ábaco exagonal de la ecuación $S = \frac{\pi}{4} D \cdot d$.

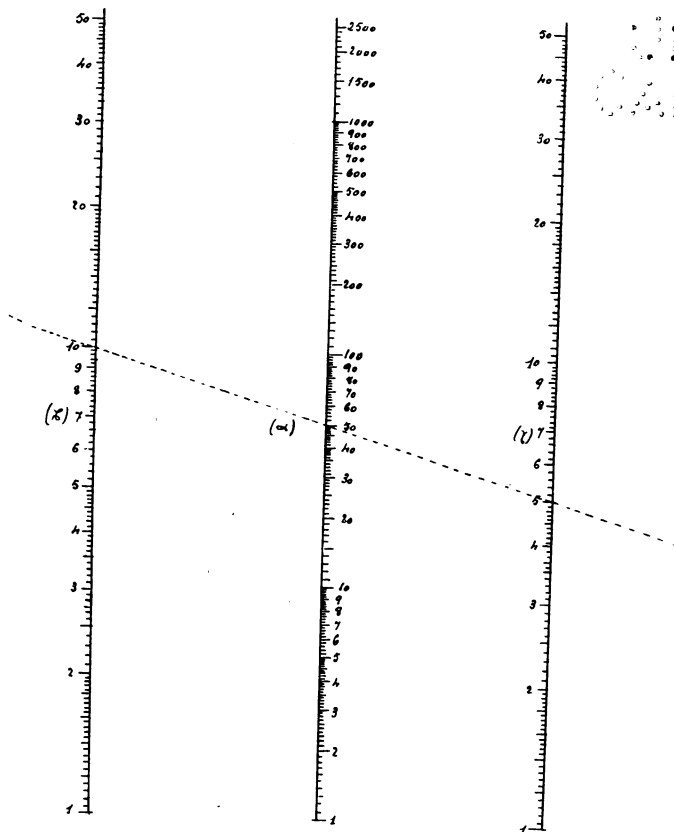


Fig. 46.—Nomograma de la multiplicación.

del cual se obtiene (n.º 13-5.º) el nomograma constituido por las rectas acotadas

$$\begin{aligned} [\alpha] \quad & \begin{cases} x = f_1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{paralela al eje de las X a la distancia 1} \\ [\beta] \quad & \begin{cases} x = f_2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{el eje de las X} \\ [\gamma] \quad & \begin{cases} x = \frac{1}{2} f_3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{paralela al eje de las X a la distancia } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si no conviniese esta disposición del nomograma y se quiere que las escalas estén separadas una distancia $d = OA = AB$ (fig. 45), puede multiplicarse D' por $2d$, para lo cual basta, como se sabe, multiplicar una de sus columnas. Si lo hacemos con la segunda resultará

$$dD' = \begin{vmatrix} f_1 & 2d & 1 \\ f_2 & 0 & 1 \\ f_3 & 2d & 2 \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose entonces las rectas acotadas

$$\begin{aligned} [\alpha] \quad & \begin{cases} x = f_1 \\ y = 2d \end{cases} \quad \dots BB' \\ [\beta] \quad & \begin{cases} x = f_2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \dots OX \\ [\gamma] \quad & \begin{cases} x = \frac{1}{2} f_3 \\ y = d \end{cases} \quad \dots AA' \end{aligned}$$

A veces, sin embargo, no se obtiene todavía una buena disposición del nomograma, dados los módulos que es preciso elegir y el tamaño que para el dibujo nos conviene; sean, por ejemplo, m_1, m_2, m_3 los módulos que debemos adoptar para f_1, f_2, f_3 con arreglo al campo en

que se mueve cada variable, y sean $OB = a$ y $OA = b$ las distancias que nos convienen entre las escalas, dada

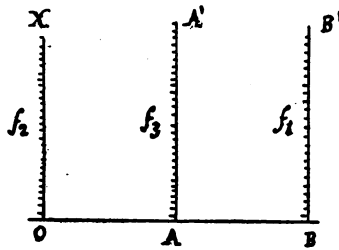


Fig. 45.

la extensión del dibujo; las ecuaciones de las tres escalas serían

$$[\alpha] \quad \begin{cases} x = m_1 f_1 \\ y = a \end{cases} \quad [\beta] \quad \begin{cases} x = m_2 f_2 \\ y = 0 \end{cases} \quad [\gamma] \quad \begin{cases} x = m_3 f_3 \\ y = b \end{cases}$$

y el determinante generador del nomograma tendría la forma

$$D''' = \begin{vmatrix} m_1 f_1 & a & 1 \\ m_2 f_2 & 0 & 1 \\ m_3 f_3 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 = -m_1 b f_1 - (a - b) m_2 f_2 + m_3 a f_3$$

pero si D''' ha de identificarse con la ecuación propuesta $f_1 + f_2 = f_3$ será necesario que

$$m_1 b = (a - b) m_2 = a m_3$$

de donde se deducen las condiciones

$$[n] \quad \frac{m_1}{m_3} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{a - b}{a} = \frac{m_3}{m_2} = 1 - \frac{b}{a}$$

y sustituyendo en la segunda $\frac{b}{a} = \frac{m_3}{m_1}$ se llegará fácilmente a la segunda condición

$$\frac{1}{m_3} = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}. \quad [m]$$

Elegidas, por tanto, las rectas OX, BB' (fig. 45) y los módulos m_1 , m_2 , el tercer módulo m_3 vendrá dado por la relación [m] y la posición de la tercera recta AA' por el resultado de despejar b en la ecuación [n].

Ejemplos.—1.º Sea la ecuación, ya vista (n.º 9) $\alpha = \epsilon \gamma$ de la multiplicación: tomando logaritmos, se convierte en

$$\log \alpha = \log \epsilon + \log \gamma.$$

Adoptando el mismo módulo $0^m,10$, verbigracia, para las tres escalas, resultará el nomograma de la figura 46 (lámina XI) construido con las escalas equidistantes

$$\begin{array}{ll} [6] & \left\{ \begin{array}{l} x = 0^m,10 \log \epsilon \\ y = 0^m,10 \end{array} \right. \quad [\gamma] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0^m,10 \log \gamma \\ y = 0 \end{array} \right. \\ [a] & \left\{ \begin{array}{l} x = 0^m,5 \times 0^m,10 \log \alpha \\ y = 0^m,5 \times 0^m,10 \end{array} \right. \end{array}$$

2.º Para determinar en topografía la posición de un punto cualquiera del terreno sobre un plano, son muy empleadas las ecuaciones

$$[1] D = g \operatorname{sen}^2 \alpha \quad [2] z = D \operatorname{tg} \alpha \quad [3] x = D \operatorname{sen} \theta \quad [4] y = D \cos \theta$$

que tomando logaritmos se convierten en las

$$\begin{array}{ll} \log D = \log g + 2 \log \operatorname{sen} \alpha, & [1] \\ \log \left\{ \begin{array}{l} z \\ x \\ y \end{array} \right\} = \log D + \log \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \end{array} \right. & \begin{array}{l} [2] \\ [3] \\ [4] \end{array} \end{array}$$

que, pueden representarse por cuatro nomogramas análogos al de la figura 46. Pero si observamos que $\log \sin \theta$ y $\log \cos \theta$ pueden tener el mismo módulo, así como los $\log x$, $\log y$ que figuran en las [3] y [4], no es difícil acoplar estos dos nomogramas en la forma que se ve en la figura 47. Pero, puesto que también los $\log y$ y $\log D$ que figuran en las [1] y [2] pueden construirse con el mismo módulo, no hay inconveniente en usar una escala común para dichas dos variables, escala que puede colocarse sobre el mismo soporte de la x , y ,

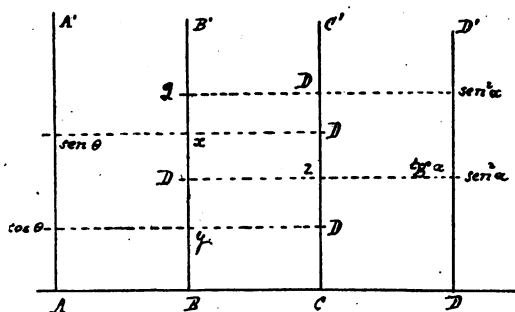


Fig. 47.

aprovechando después el soporte de la escala D ([3] y [4]) para colocar las D [1] y z [2], sin más que poner también sobre otro soporte cualquiera las otras escalas restantes, o sea, $2 \log \sin \alpha$ y $\lg \alpha$. De este modo, y sólo con cuatro soportes, cada uno de dos escalas, se puede llegar a obtener una *tabla taquimétrica* completa (figura 47). La escala AA' lleva por cada lado las $\log \sin \theta$ y $\log \cos \theta$ respectivamente; la BB' sirve por un lado para las variables D y g, por el otro para las x e y ; la CC' lleva por un lado la escala D (fórmulas [3] y [4]) y por otro las z y D (fórmula [1]) y, finalmente, la DD' tiene a la derecha los valores de $2 \log \sin \alpha$, y a

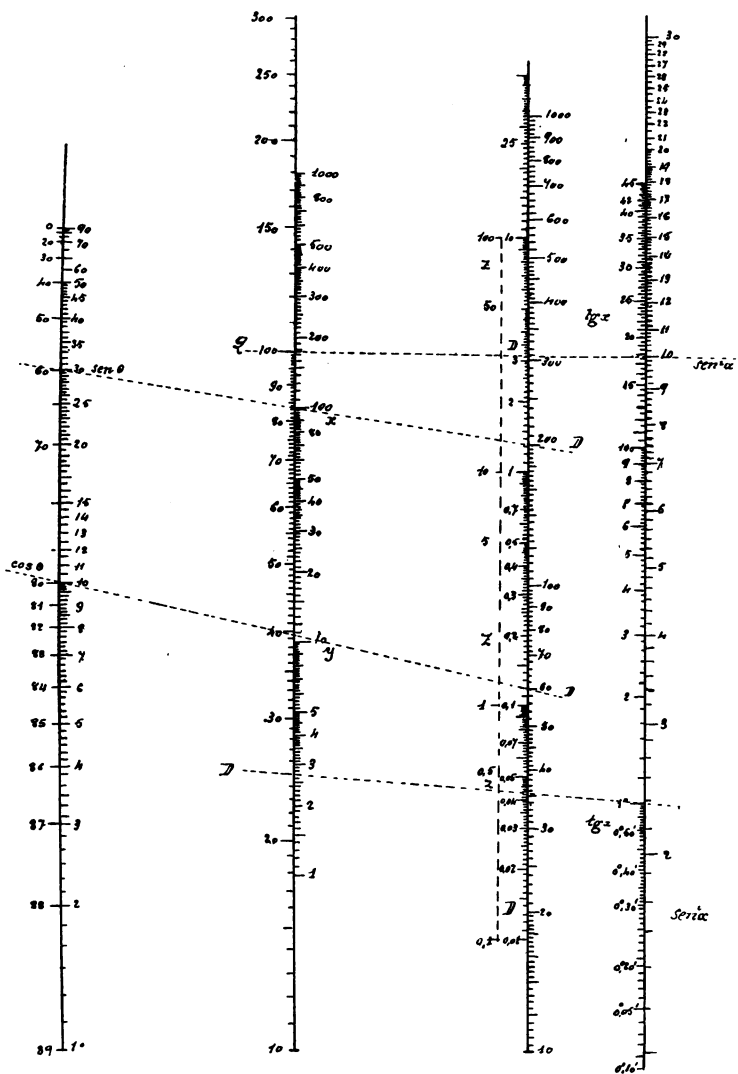


Fig. 48.—Nomograma para el taquímetro.

Ecuaciones: $D = g \sin^2 \alpha$
 $x = D \sin \theta$

$z = D \tan \alpha$
 $y = D \cos \theta$

la izquierda los de $\text{tg } \alpha$, por lo cual las alineaciones que se ven en la figura resuelven por completo el problema, en una sola hoja de papel.

Respecto a módulos, lo más sencillo sería poner las cuatro escalas equidistantes (fig. 47), pero esto tiene inconvenientes, dentro del campo usual de las variables, para los nomogramas [1] y [2]. Para evitarlo, hemos recurrido en la figura 48 (lámina XII) a las fórmulas explicadas más arriba [n] y [m]. Para ello, y elegido el módulo $0^{\text{m}},10$ para las escalas $\log \sin \theta$, $\log \cos \theta$ y D (fórmulas [3] y [4]), que se han colocado equidistantes a $0^{\text{m}},05$ una de otra, resulta $0^{\text{m}},05$ como módulo de las escalas $\log x$ y $\log y$. Después, y para situar el cuarto soporte, tenemos como dato (nomogramas [1] y [2]) (fig. 47)

$$b = BC = 0^{\text{m}},05$$

por lo que, eligiendo el módulo $0^{\text{m}},075$ para las escalas DD' , o sean las $2 \log \sin \alpha$ y $\text{tg } \alpha$, se tiene además

$$m_1 = 0^{\text{m}},075$$

quedando aún a nuestro arbitrio una de las cantidades m_3 , o $a = BD$. Haciendo, pues, $m_3 = 0^{\text{m}},05$ la ecuación (n) da en seguida $a = m_1 = 0^{\text{m}},075$, y la ecuación (m)

$$m_2 = \frac{m_1 m_3}{m_1 - m_3} = \frac{0^{\text{m}},075 \times 0^{\text{m}},05}{0^{\text{m}},075 - 0^{\text{m}},05} = \frac{0^{\text{m}},00375}{0^{\text{m}},025} = 0^{\text{m}},15$$

que es el módulo con que está construida la escala común de $\log g$ y $\log D$. Por último, dentro del mismo soporte, la escala z está corrida un módulo ($0^{\text{m}},05$), hacia arriba, con respecto a la D , para mayor facilidad en las lecturas y para poder colocar la escala $\text{tg } \alpha$ dentro de los límites del dibujo.

Puede observarse también en el nomograma (fig. 48) la poca apreciación que tienen las escalas $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$ para valores respectivamente superiores o inferiores a 45° , ocurriendo cosa parecida con la $\text{tg } \alpha$, así como en todas ellas con los ángulos menores de 1° , que se han suprimido por imposibilidad material del dibujo en los límites adoptados. Este defecto puede corregirse haciendo nomogramas especiales para estos valores de las líneas trigonométricas, pero ni aun así se salva la dificultad de los valores ∞ que tienen $\log \text{sen } \theta$ y $\log \text{cos } \theta$ para los de θ cero y 90° respectivamente, por lo que puede ser práctico el método de M. Lafay indicado en la obra de M. R. Soreau. Identificando, en efecto, la ecuación propuesta $f_1 + f_2 = f_3$ con el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & 0 & 1 \\ f_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se deduce el nomograma

$$[\alpha] \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{f_1} \end{cases} \quad [\beta] \quad \begin{cases} x = \frac{1}{f_2} \\ y = 0 \end{cases} \quad [\gamma] \quad \begin{cases} x = \frac{1}{f_3} \\ y = \frac{1}{f_3} \end{cases} \quad x = y = \frac{1}{f_3}$$

que se compone de tres escalas, que son el eje de las Y, el de las X, y su bisectriz, acotadas respectivamente según los valores de $\frac{1}{f_1}$, $\frac{1}{f_2}$ y $\frac{1}{f_3}$.

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$\text{sen } b = \text{sen } B \text{ sen } a$$

empleada en la resolución trigonométrica de los triángulos esféricos rectángulos; tomando logaritmos se tiene

$$\log \text{sen } b = \log \text{sen } B + \log \text{sen } a$$

que puede transformarse en

$$(2M - N \log \operatorname{sen} b) = (M - N \log \operatorname{sen} B) + (M - N \log \operatorname{sen} a)$$

y se puede representar, según lo dicho, por las tres escalas

$$(B) \dots Y = \frac{1}{M - N \log \operatorname{sen} B} \quad \text{según el eje de las } Y$$

$$(a) \dots X = \frac{1}{M - N \log \operatorname{sen} a} \quad \text{según el eje de las } X$$

$$(b) \dots Z = \frac{1}{2M - N \log \operatorname{sen} b} \quad \text{según la bisectriz de los ejes.}$$

En la figura 49 se representa el esquema de este no-

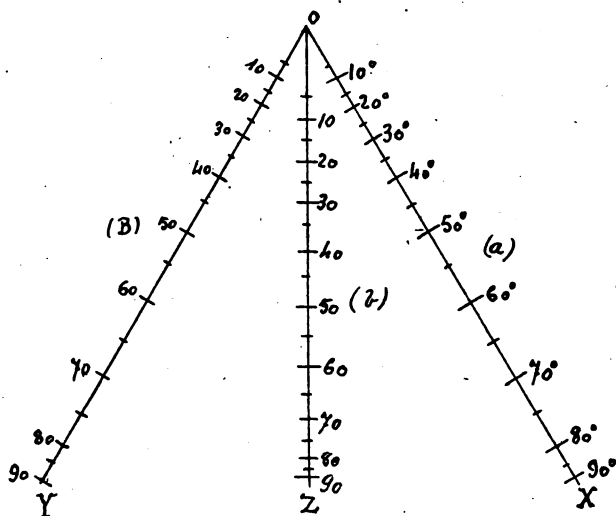


Fig. 49.

mograma cuya teoría puede ser muy útil en las aplicaciones.

17.—*Forma* $\frac{f_1}{f_2} = f_3$.—Como puede verse, esta forma

se reduce por anamorfosis logarítmica a la anteriormente estudiada, admitiendo, por tanto, iguales ábacos y nomogramas que aquélla. Conviene, sin embargo, ver los que la son característicos, para lo cual observaremos se identifica perfectamente con el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ f_2 & -1 & 0 \\ 0 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que, como puede verse, es igual al D_2 (n.º 13), haciendo en éste $k = 1$, $r_2 = -1$, $f_3 = 1$, $\varphi_3 = f_3$. Nuestra ecuación podrá, pues, representarse por dos redes de paralelas a los ejes y por un sistema de radianes que pase por el origen. En la figura 30 hemos visto ya un ábaco de esta clase, y como nuevo ejemplo vamos a construir el de la ecuación

$$V = \frac{h}{3} \pi \frac{d^2}{4} = 0,2618 h \cdot d^2$$

que da el volumen del cono en función del diámetro d , de la base y de su altura h . Se deducen las tres redes

$x = V$ de paralelas al eje Y.

$y = 0,2618 h$ de paralelas al eje X.

$x = y d^2$ de radianes que pasan por el origen

y para construirlas se han adoptado en la figura 50 (lámina XIII) para V el módulo $0^m,0005$ y para h el de $0^m,01$ (1).

(1) Puede subsanarse fácilmente el error cometido al pie de la lámina. Debe decir: $V = \frac{\pi}{12} h d^2$.

LÁMINA XIII

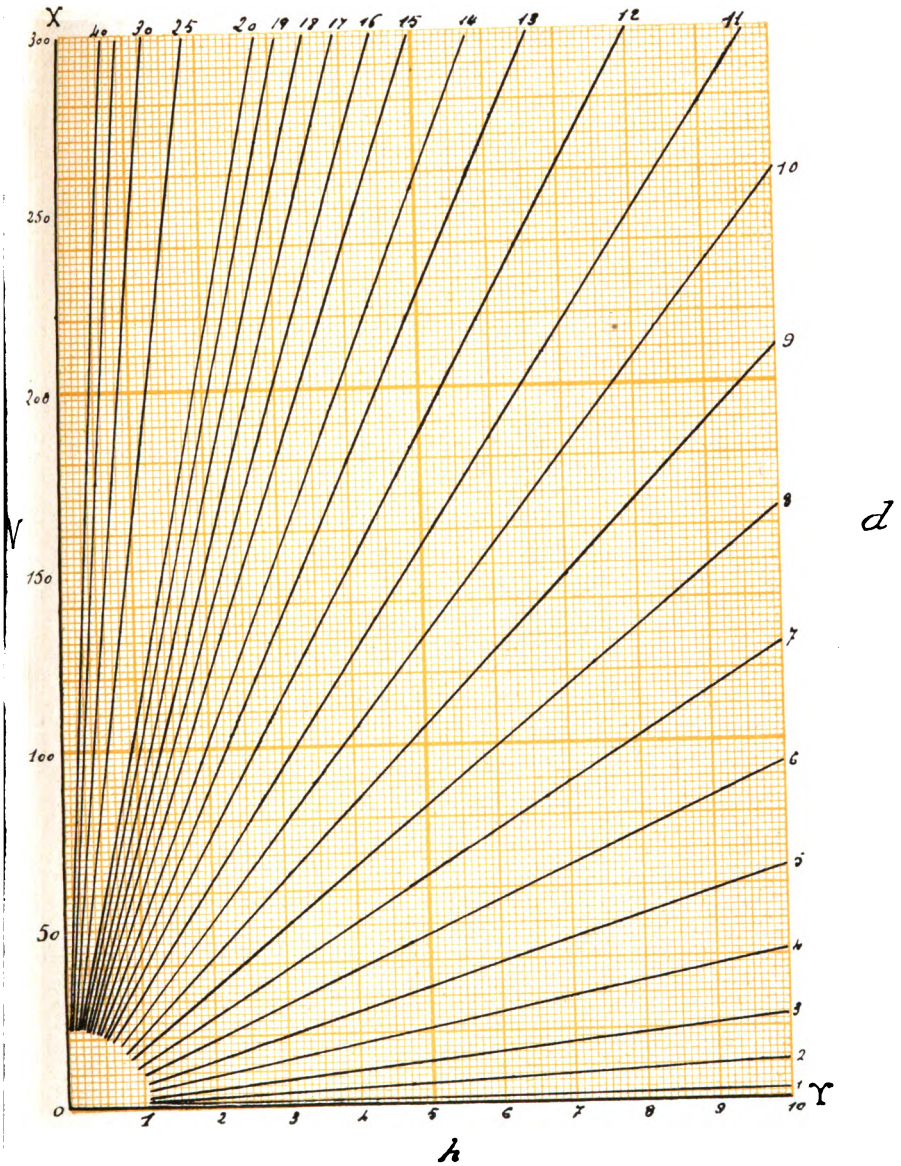


Fig. 50.—Ábaco para volumen del cono $V = \frac{\pi}{3} h r^2$

Nomogramas.—Del determinante anterior se deduce, sumando las dos últimas columnas

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ f_2 - 1 & -1 & \\ 0 & f_3 & 1 + f_3 \end{vmatrix} = 0$$

que da las tres rectas acotadas

$$[\alpha] \quad \begin{cases} x = f_1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ Eje de las X}$$

$$[\beta] \quad \begin{cases} x = -f_2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ Paralela al eje de las X}$$

a la distancia 1, y acotada en sentido contrario de f_1 , y la

$$[\gamma] \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{f_3}{1 + f_3} \end{cases} \text{ eje de las Y.}$$

Se ve, por tanto, que, eligiendo los ejes oblicuos OX, OY (fig. 51) y tomando OM = 1, el nomograma .

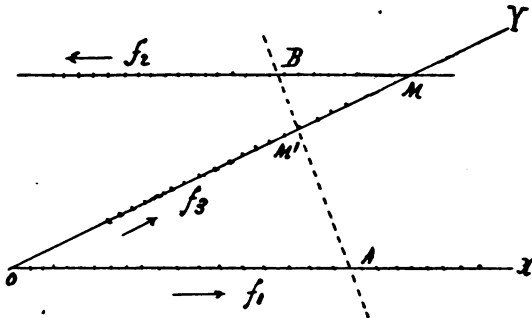


Fig. 51.

tendrá la forma de una Z, los ceros de las escalas f_1 y f_3 estarán en el origen de coordenadas; el de la escala f_2 en el punto M, puesto que para $f_1 = 0$, f_2 es cero, sea cualquiera el valor de f_3 .

Si, para mayor facilidad en la construcción, quisiéramos hacer $OM = d$, siendo d una distancia determinada, bastaría multiplicar el determinante por d ; multiplicando su segunda columna tendríamos

$$[\alpha] \quad \begin{cases} x = f_1 \\ y = 0 \end{cases} \quad [\beta] \quad \begin{cases} x = -f_2 \\ y = d \end{cases} \quad [\gamma] \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = d \frac{f_3}{1 + f_3} \end{cases}$$

Puede también necesitarse que f_1 y f_2 tengan módulos distintos, y entonces habrá que ver el modo de construir la escala lineal que representa en $[\gamma]$ la coordenada y . Sea, en efecto, $AM'B$ una solución cualquiera, la semejanza de los triángulos que se ven en la figura da

$$\frac{OA}{MB} = \frac{OM'}{MM'}$$

pero, puesto que $OM' = y$, se tendrá, siendo m_1, m_2 los módulos de f_1, f_2 .

$$\frac{m_1 f_1}{m_2 f_2} = \frac{y}{d - y}$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta la propuesta

$$\frac{f_1}{f_2} = f_3$$

$$y = d \frac{m_1 f_3}{m_2 + m_1 f_3} \quad [\gamma]$$

que es la escala lineal buscada.

Para construirla observaremos que el punto H (figura 16) en que se encuentran todas las rectas que unen puntos de igual cota, se halla en este caso en la recta

MB (fig. 52) siempre que la escala f_1 sea regular, o en la recta OX siempre que la escala f_2 lo sea, por lo cual bastará calcular por la fórmula $[y]$ un valor cualquiera de y , y unirlo por una recta con el punto de igual cota de la escala f_1 , en la hipótesis de que ésta sea la regular; el punto B será el centro de la radiación y se construirá la escala como se ve en la figura 52.

Si ninguna de las escalas f_1 o f_2 fuese regular, se trazará la OX' que lo sea, y, como la cota de f_3 corres-

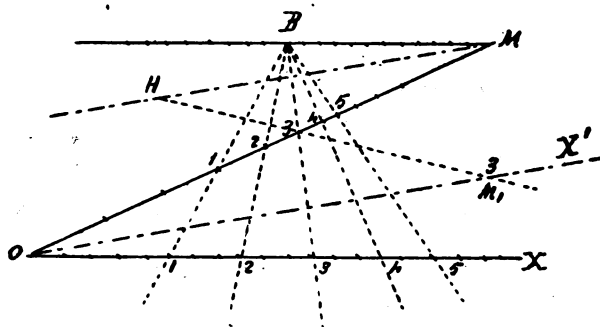


Fig. 52.

pondiente al punto M es siempre ∞ (punto que corresponde a la cero de f_2), la MH paralela trazada desde M a OX' unirá los puntos de cota ∞ de las dos escalas OM y OX', por lo cual en ella estará el punto H, qué se obtendrá, por consiguiente, hallando la intersección de dicha paralela con la recta $M_1 3'$ que una cotas iguales de OX' y OM.

Ejemplos.— 1.º Sea la exponencial

$$y = e^{\frac{x}{m}}$$

que sirve para el cálculo de la *catenaria* y de las funciones llamadas *hiperbólicas*. Tomando logaritmos se tiene

$$\log y = \frac{x}{m} \log e$$

que tiene la forma propuesta haciendo

$$\begin{aligned} f_1 &= x \log e = 0,43427 x \\ f_2 &= \log y \\ f_3 &= m. \end{aligned}$$

Los módulos adoptados para el nomograma de la figura 53 (lámina XIV) son

$$\begin{aligned} d &= 0^m,20 \\ m_1 &= 0^m,005 \text{ para la variable } x \\ m_2 &= 0^m,10 \text{ para la variable } \log y \\ m_3 &= d \frac{0^m,005 m}{0,10 + 0^m,005 m} \text{ para la variable } m \end{aligned}$$

y en el cual señalamos el punto H que sirve para graduar la escala m .

2.º La ecuación

$$V = \frac{h}{2} \pi \frac{d^2}{4} = 0,392 h d^2$$

expresa el volumen del *paraboloide apolónico* en función del diámetro d de la sección normal distante h del vértice. Haciendo

$$\begin{aligned} f_1 &= V \\ f_2 &= 0,392 h \\ f_3 &= d^2 \end{aligned}$$

LÁMINA XIV

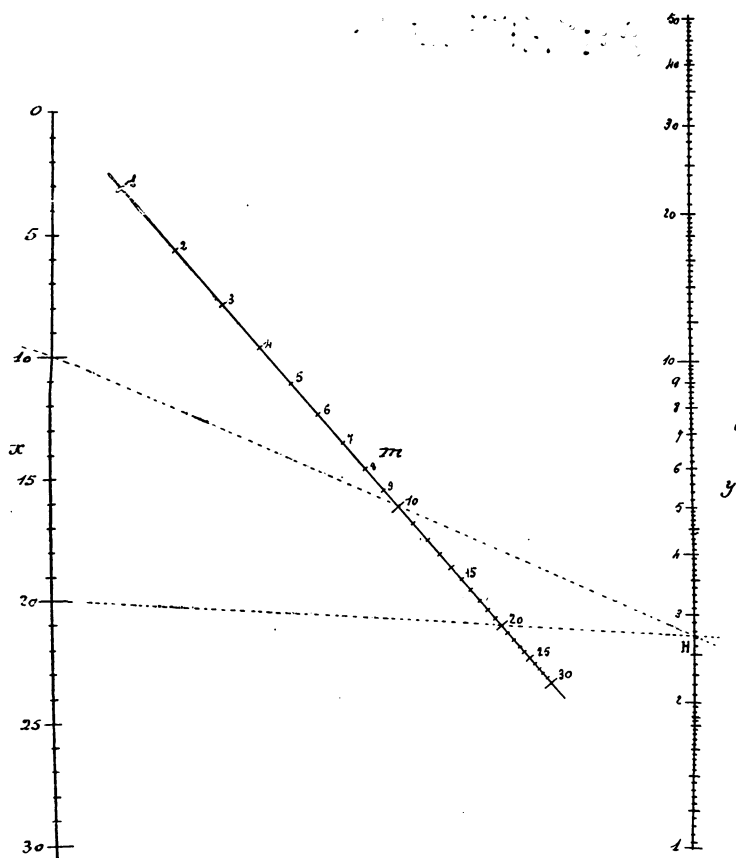


Fig. 53.—Nomograma de la ecuación exponencial $y = e^{\frac{x}{n}}$.

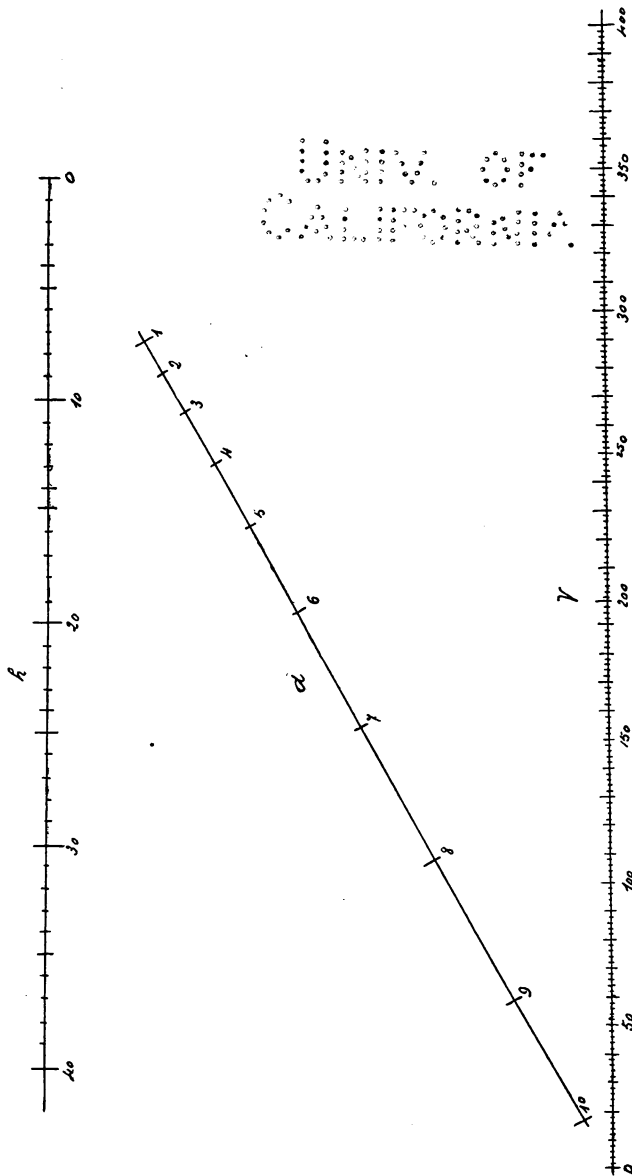


Fig. 54. — Volumen del paraboloides apolónico.
Ecuación: $V = 0.392 \cdot h \cdot d^2$.

se ha construido el nomograma de la figura 54 (lámina XV) con las escalas

$$\begin{aligned} d &= 0^m,20 \\ u_1 &= 0,0005 \text{ V} \\ u_2 &= 0,01 \times 0,992 \text{ h} \end{aligned} \quad u_3 = d \frac{0,0005 d^2}{0,01 + 0,0005 d^2}.$$

18.—Forma $f_1 f_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0$.—Esta ecuación se identifica con el determinante (5) (n.º 13)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

que da un ábaco compuesto de dos redes de paralelas a los ejes $x = f_1$, $y = f_2$, y una serie de rectas definidas por la ecuación

$$x f_3 + y \varphi_3 + \psi_3 = 0$$

o un nomograma (n.º 14) compuesto de dos rectas paralelas Au y Bv (fig. 55), acotadas según los valores de f_1 y f_2 , y una curva cuyas coordenadas cartesianas, con respecto a los ejes OX OY , vienen definidas por las ecuaciones

$$[\gamma] \quad \begin{cases} x = -d \frac{\varphi_3 - f_3}{\varphi_3 + f_3} \\ y = -\frac{\psi_3}{\psi_3 + f_3} \end{cases}$$

en las que d representa la distancia $AO = OB$.

Ejemplo.—Una ecuación de tercer grado es siempre reducible a la forma

$$z^3 + pz + q = 0$$

que entra dentro de la propuesta, haciendo

$$f_3 = 1, \quad \varphi_3 = z, \quad \psi_3 = z^3, \quad f_1 = q \text{ y } f_2 = p$$

de donde resulta el nomograma compuesto de dos rectas paralelas acotadas según los valores de p y q , y una curva cuyas coordenadas cartesianas son (fig. 55)

$$[\gamma] \quad \begin{cases} x = -d \frac{z-1}{z+1} \\ y = -\frac{z^3}{z+1} \end{cases}$$

Haciendo $d = 0^m,05$, y dando a z valores positivos y negativos 0, 1, 2....., hemos construido el nomograma de

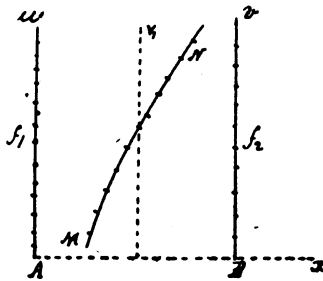


Fig. 55.

la figura 56 (lámina XVI), en el cual se ve que la ecuación no tiene sus tres raíces reales más que para valores negativos de p , y también que cuando la cantidad

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3$$

es negativa, las tres raíces son reales, habiendo una sola raíz real cuando es positiva y dos raíces iguales cuando es nula. En el dibujo se señalan las soluciones corres-

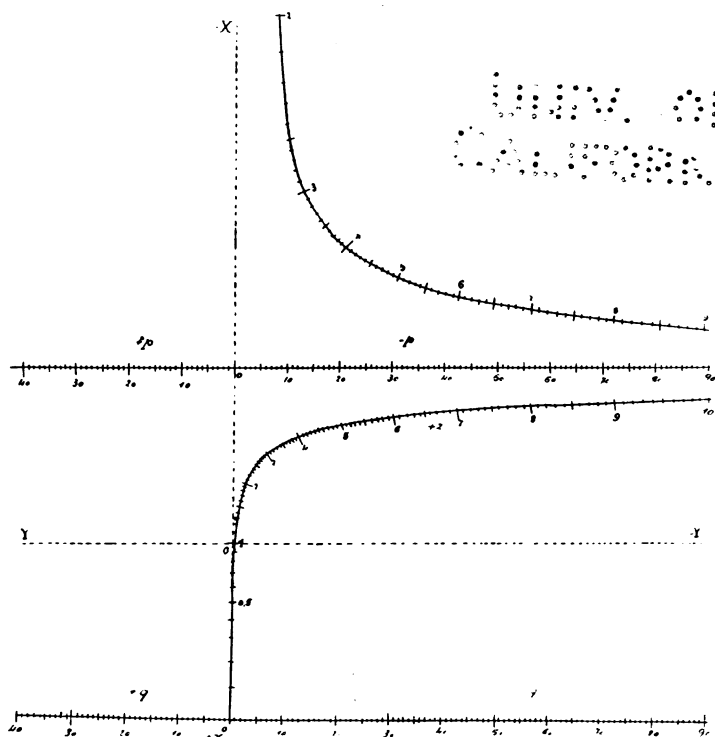


Fig. 56.—Ecuación de tercer grado $z^2 + pz + q = 0$.

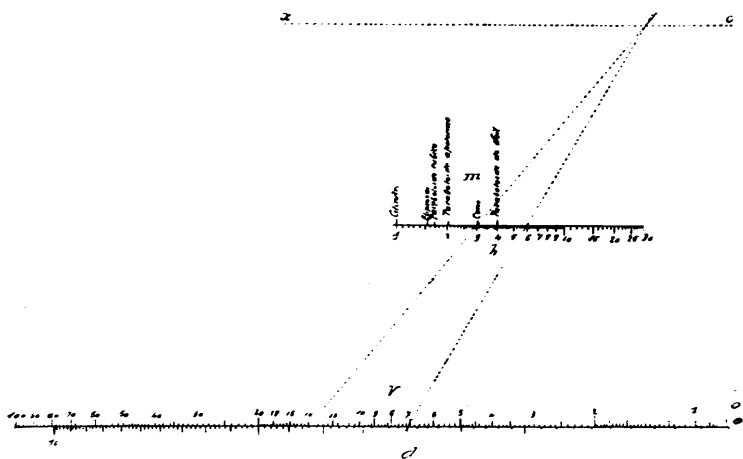


Fig. 74.—Nomograma de la ecuación $V = m \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h$.

pendientes a $p = 5$, $q = -2$, que da la raíz única, real y positiva $z = 0,333$; $p = -60$, $q = +20$ que tienen las tres raíces reales $z = -7,92$ $z = +7,16$ $z = +0,33$; $p = -6$ $q = +10$, que da una sola raíz negativa $z = -3,11$; por último, para $q = 0$, hay sólo dos raíces iguales de signos contrarios.

19.—Formas representables por nomogramas de un soporte rectilíneo y dos curvilíneos.—Son, evidentemente, representables de esta manera las ecuaciones que puedan identificarse con el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [a]$$

que da la recta

$$[x] \quad \left. \begin{array}{l} x = f_1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{Eje de las X}$$

y las dos curvas acotadas

$$[6] \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{f_2}{\psi_2} \\ y = \frac{\varphi_2}{\psi_2} \end{array} \right\} \quad [\gamma] \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{f_3}{\psi_3} \\ y = \frac{\varphi_3}{\psi_3} \end{array} \right\}$$

Ejemplos.—1.º Sea la conocida ecuación de trigonometría

$$\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q}$$

en la que, haciendo $\frac{p+q}{2} = \alpha$ e identificando con [a], resulta

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & 0 & 1 \\ \operatorname{sen} p & 1 & \cos p \\ \operatorname{sen} q & -1 & \cos q \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha (\cos q + \cos p) - \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 0$$

que vendrá representada por el eje de las X, acotado con los valores numéricos de $\operatorname{tg} \alpha$, y por las dos curvas

$$\left. \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} p \\ y = \frac{1}{\cos p} \end{array} \right\} [p] \qquad \left. \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} q \\ y = -\frac{1}{\cos q} \end{array} \right\} (q)$$

simétricas con respecto al eje de las X y acotadas según los valores crecientes de p y q . En la figura 57 (lámina XVII) aparece el nomograma indicado, siendo, por demás, sencilla la construcción de las curvas $[p]$ y $[q]$, cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$y = \frac{x}{\operatorname{sen} p} \qquad -y = \frac{x}{\operatorname{sen} q}$$

y que se facilita multiplicando por la cantidad $d = 0^m,02$ el determinante generador, con lo cual el origen de las curvas $[p]$ y $[q]$ puede distanciarse cuanto se quiera y convenga del eje de las X.

2.º Como caso curioso damos en la figura 58 (lámina XVIII) el nomograma construido por M. Soreau de la ecuación

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1 - h_2}$$

que da la velocidad v teórica de salida del agua por un orificio rectangular practicado en pared delgada, siendo h_1 , h_2 los valores de las distancias de los dos lados horizontales del orificio, al nivel del agua, y g la aceleración de la gravedad.

El determinante generador empleado es

$$D = \begin{vmatrix} 0,358v & 0 & 1 \\ h_1^{3/2} & 1 & h_1 \\ h_2^{3/2} & 1 & h_2 \end{vmatrix} = 0$$

LÁMINA XVII

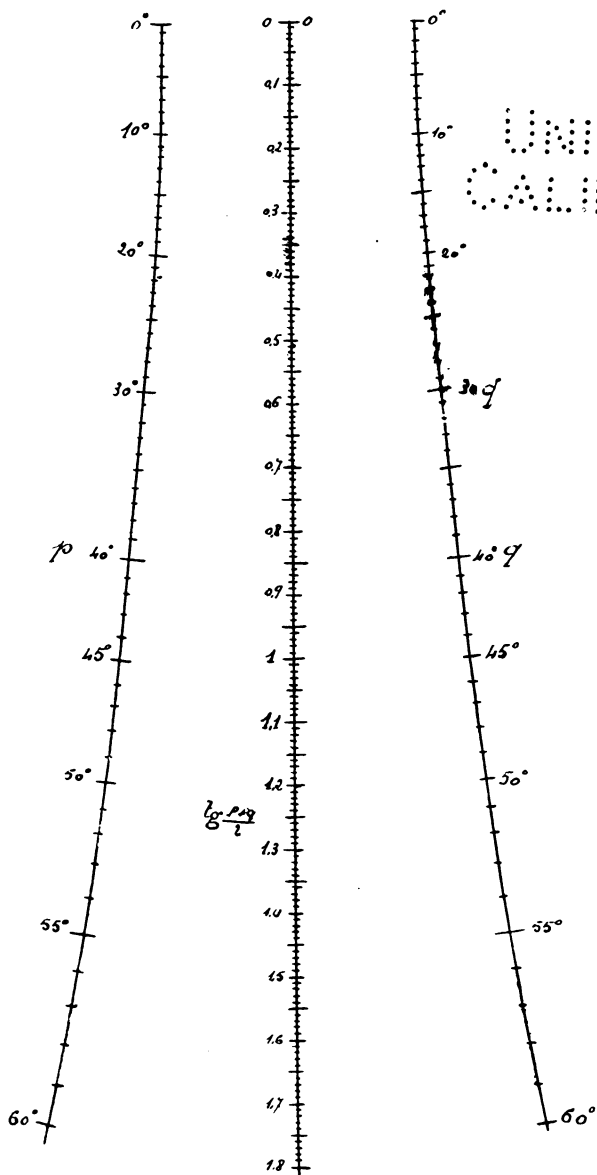


Fig. 57.—Ecuación: $\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q}$.

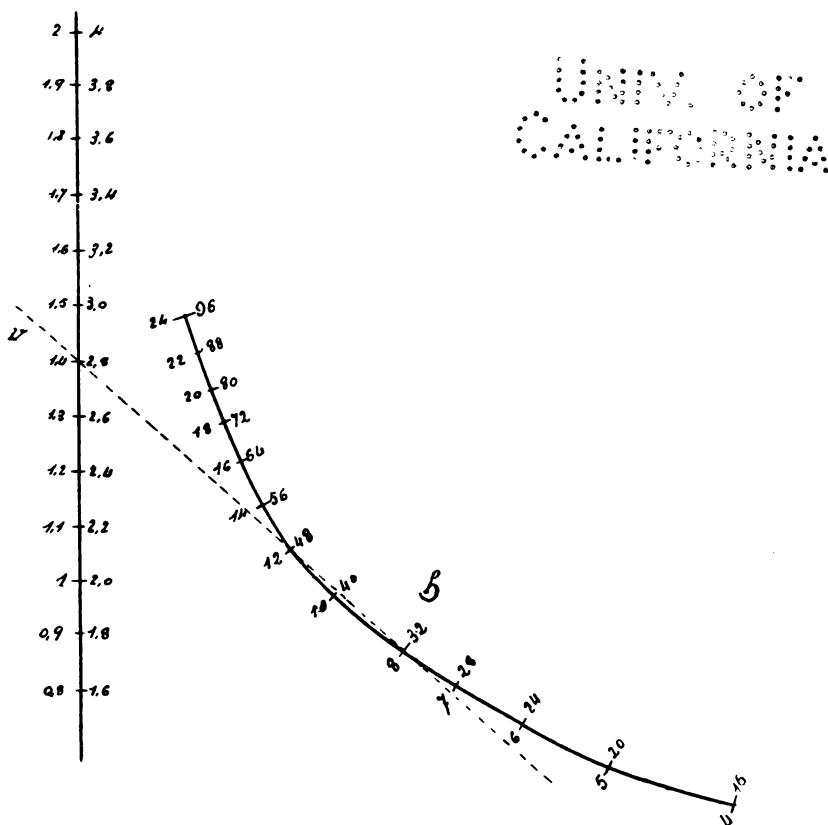


Fig. 58.—Nomograma para la velocidad de salida del agua por orificio rectangular practicado en pared delgada.

$$\text{Ecuación: } v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

que da el eje de las X acotado según los valores de 0,338 v y las dos curvas

$$\left. \begin{array}{l} x = h_1 \frac{3}{2} \\ y = \frac{h_1}{1} \end{array} \right\} [\delta] \qquad \left. \begin{array}{l} x = h_2 \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{h_2} \end{array} \right\} [\gamma]$$

que, como puede verse, se reducen a *una sola* hipérbola $[h]$, cuya ecuación es

$$x^2 y = 1$$

y tiene por asíntotas los dos ejes coordenados.

IV.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE CUATRO VARIABLES

20.—Idea general: caso en que existe la representación sobre un plano, escalas binarias.—Sea la ecuación de cuatro variables $F(\alpha \epsilon \gamma \delta) = 0$. Podemos concebir las cuatro superficies

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad f(x y z \alpha) = 0 \\ (\epsilon) \quad f(x y z \epsilon) = 0 \\ (\gamma) \quad f(x y z \gamma) = 0 \\ (\delta) \quad f(x y z \delta) = 0 \end{array} \right\} (a)$$

tales que la propuesta sea el resultado de eliminar x, y, z , entre las del sistema (a); una solución cualquiera de este sistema será el punto de encuentro de las cuatro superficies $[\alpha], [\epsilon], [\gamma], [\delta]$, y será también solución de $F(\alpha \epsilon \gamma \delta) = 0$, por lo que, si elegimos arbitrariamente tres de ellas, podremos obtener la cuarta por una construcción geométrica, y tendremos representada la propuesta por cuatro grupos de *superficies acotadas*

(α) (β) (γ) (δ). Dados tres valores $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, se obtendrá fácilmente el correspondiente de δ , sin más que hallar el punto común de las superficies (α_1) (β_1) (γ_1) y leer la cota δ_1 de la del grupo (δ) que pase por dicho punto. Mas se comprende que un ábaco de esta clase sería imposible en la práctica por la dificultad de *materializar* las superficies (α), y sólo cuando estas superficies sean muy sencillas podremos llegar a una solución posible y utilizable sobre un plano.

Este caso se presenta cuando las superficies (α) son

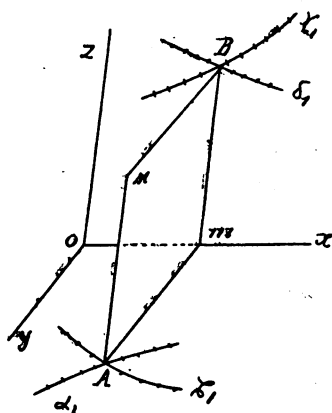


Fig. 59.

cilindros, tales que las generatrices de dos de ellos (α) (β) sean paralelas a una dirección D, y las generatrices de los otros dos (γ) (δ) lo sean también a otra recta cualquiera D'. Entonces, la intersección de los cilindros (α) (β) es paralela a D, y la intersección de los (γ) (δ) a D', de donde se deduce que cualquier solución $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la ecuación $F(\alpha\beta\gamma\delta)$ se obtendrá por la intersección de dos rectas situadas en un plano paralelo al determinado por las direcciones DD'. Si, pues, escogemos como ejes coordenados OZ, OY (fig. 59) dos

paralelas a D y D' respectivamente, y como eje de las X una recta cualquiera que pase por O, la recta AM, intersección de los cilindros (α_1) (ϵ_1) pasará por la A de sus trazas α_1 , ϵ_1 sobre el plano XY y será paralela al eje OZ, del mismo modo que la intersección BM de los cilindros (γ_1) (δ_1) pasará por la B de sus trazas sobre el plano XZ y será paralela al eje Y; el plano AMBm, paralelo al YZ, que contiene la solución M, tendrá sus trazas paralelas a los ejes referidos, y si rebatimos el coordenado ZOY sobre el YOX alrededor de OX como charnela, el punto m permanecerá fijo, así como el eje OY, el punto A y las curvas α_1 , ϵ_1 ; el eje OZ (fig. 60) se rebatirá

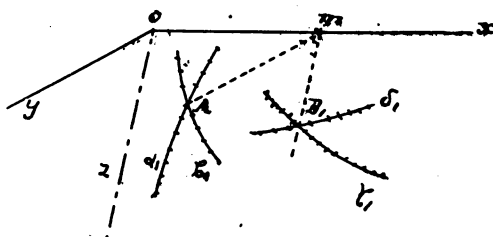


Fig. 60.

en OZ_1 , el punto B en B_1 , y tendremos un ábaco plano cuya clave será: buscar el punto de intersección (A) de las curvas (α) (ϵ) acotadas con los valores dados α_1 , ϵ_1 ; trazar por dicho punto una paralela Am a una dirección dada OY, hasta que corte en m a la recta OX; trazar por m una paralela MB₁, a otra dirección también dada OZ_1 , y ver el punto B, en que esta última corta a la curva del sistema γ cuya cota γ_1 se conoce; la δ_1 de la curva (δ) que pase por B₁ será la solución buscada, constituyendo el conjunto $\alpha_1 \epsilon_1 \gamma_1 \delta_1$ una solución de la propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma \delta) = 0$.

Mas, si las superficies (a) son cilindros, las ecuacio-

nes de sus trazas sobre un plano cualquiera XY (figura 60) serán de la forma.

$$\begin{array}{ll} \varphi(x y \alpha) = 0 & \text{curva } \alpha_1 \\ \varphi(x y \epsilon) = 0 & \text{curva } \epsilon_1 \\ \varphi(x y \gamma) = 0 & \text{curva } \gamma_1 \\ \varphi(x y \delta) = 0 & \text{curva } \delta_1 \end{array}$$

Eliminando y entre las dos primeras ecuaciones, la abscisa $Om = x$ del punto de intersección de α_1, ϵ_1 será

$$x = F(\alpha \epsilon).$$

Y eliminando también y entre las dos segundas ecuaciones, se verá del mismo modo que la abscisa x del punto de intersección de las curvas γ_1, δ_1 es de la forma

$$x' = F(\gamma \delta)$$

luego para que haya ábaco plano, será preciso que se verifique

$$x = x' = Om$$

o sea que la ecuación propuesta pueda identificarse con la

$$F(\alpha \epsilon) = F(\gamma \delta). \quad [1]$$

Como puede verse, sea cualquiera el punto m , goza de la propiedad de que en él concurren siempre las rectas Am, Bm , que, siendo paralelas a dos direcciones arbitrarias OY, OZ , pasan además por los puntos de intersección de dos curvas $(\alpha_1) (\epsilon_1)$ y de otras dos $(\gamma_1) (\delta_1)$, cuyas cotas son una solución numérica de la propuesta $F(\alpha_1 \epsilon_1 \gamma_1 \delta_1)$.

A la línea OX , lugar geométrico de los puntos m , se la llama *escala binaria*, pudiéndose, por tanto, definir una escala de esta clase como compuesta de un eje OX acotado, de una dirección cualquiera OY , y de dos redes de curvas (α) (ϵ) definidas por las ecuaciones

$$f(xy\alpha) = 0 \text{ y } f(xy\epsilon) = 0$$

referidas a dichos ejes OX OY , tomados como coordenados.

Cuando las direcciones D , D' determinan un plano

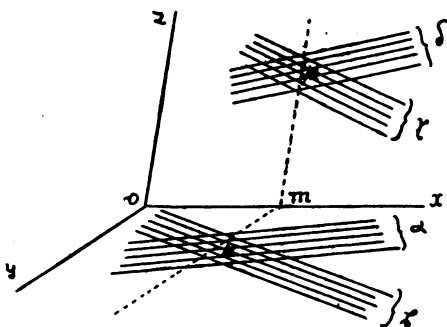


Fig. 61.

perpendicular a OX , al hacer el rebatimiento del plano XOZ sobre el XOY , OZ_1 y OY se confunden, así como las rectas Am y B_1m (fig. 60), de donde resulta simplificada la clave, puesto que bastará trazar por la intersección A de las curvas de cotas $\alpha_1 \epsilon_1$ una paralela a OY , ver su punto de encuentro B_1 con la curva γ_1 y leer la cota de la del sistema (ϵ) que pasa por dicho punto.

21.—Representación por redes de rectas y líneas acotadas: claves.—Cuando los cilindros (α) que hemos considerado se convierten en planos, paralelos dos a dos a las direcciones D y D' , sus trazas son líneas rectas, y el

ábaco queda formado por cuatro redes de rectas con la clave consabida. Mas si consideramos aisladamente las ecuaciones de tres variables

$$\begin{cases} F(\alpha\delta) = x \\ F(\gamma\delta) = x \end{cases}$$

podemos suponer que en cada uno de los planos ZOY y XOY existe un ábaco formado (fig. 61) por dos redes de rectas $[\alpha][\delta]$ y una tercera red (m) de paralelas Nm al eje OY, razón por la cual si acoplamos ambos ábacos por su escala común OX (m) llegaremos al mismo resultado expuesto anteriormente.

Ahora bien, si el ábaco $[\alpha][\delta][m]$, por ejemplo, ha de ser solución de la

$$x = F(\alpha\delta) \quad [1]$$

deberá verificarse, como sabemos, entre las rectas

$$\begin{cases} x f_1 + y \varphi_1 + \psi_1 = 0 \\ x f_2 + y \varphi_2 + \psi_2 = 0 \\ x \quad \quad \quad - m = 0 \end{cases} \quad (a)$$

la condición

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 1 & 0 & -m \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} f_1 + \lambda \varphi_1 & \varphi_1 & \psi_1 - \lambda' \varphi_1 \\ f_2 + \lambda \varphi_2 & \varphi_2 & \psi_2 - \lambda' \varphi_2 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 0.$$

Pero si sustituímos las redes (α) por curvas acotadas, las ecuaciones de dichas curvas serán (n.º 13)

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-\psi_1 + \lambda' \varphi_1}{f_1 + \lambda \varphi_1} \\ y &= \frac{\varphi_1}{f_1 + \lambda \varphi_1} \end{aligned} \right\} [\alpha] \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{-\psi_2 + \lambda' \varphi_2}{f_2 + \lambda \varphi_2} \\ y &= \frac{\varphi_2}{f_2 + \lambda \varphi_2} \end{aligned} \right\} [\delta] \quad \begin{cases} x = m \\ y = 0 \end{cases} [m]$$

lo que nos dice claramente que la recta $N'Nm$ que une tres puntos correspondientes a una solución de la [1] pasa también por el punto m ; luego es posible construir

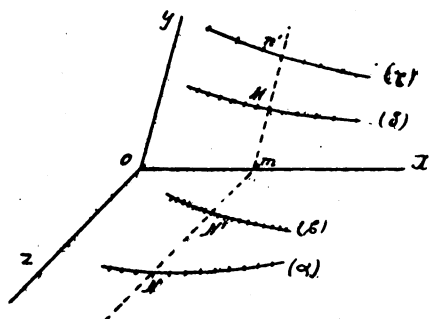


Fig. 62.

un nomograma compuesto de las cuatro curvas acotadas $[\alpha][e][\gamma]$ y $[\delta]$ (fig. 62), tal que las dos alineacio-

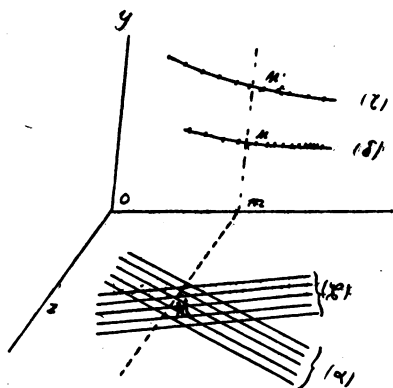


Fig. 63.

nes $\alpha - e$ y $\gamma - \delta$, concurren siempre en un mismo punto m de la escala binaria OX .

A estos nomogramas se les ha llamado de *doble alineación concurrente*: si sólo se hiciera la sustitución de

las redes (α) por curvas acotadas en uno de los planos ZOX o YOX, resultarían un ábaco y un nomograma enlazados por la escala binaria OX, como, se ve en la figura 63.

Fácil es apreciar comparando las figuras 62 y 63, que cada uno de los sistemas planos tales como $[\alpha]$ se ha sustituido por un cilindro $[\alpha]$ cuya traza sobre el plano coordenado que se considera es la curva, lugar geométrico de los puntos correspondientes a las trazas de dichos planos (α); si, en aquel caso, el punto común a los cuatro planos cuyas cotas representan una solución $(\alpha, \epsilon, \gamma, \delta)$, se encuentra siempre en un plano parale-

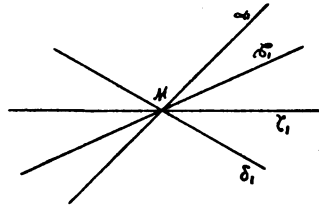


Fig. 64.

lo al YOZ y que pasa por el punto m , en la figura 63, los cuatro puntos correspondientes a las rectas $(\alpha, \epsilon, \gamma, \delta)$, solución de la propuesta $F(\alpha \epsilon \gamma \delta) = 0$, se encuentran también en un plano MmM' que pasa por el mismo punto m . Veamos ahora los casos particulares que pueden ocurrir.

22.—Los cuatro sistemas de planos $(\alpha) (\epsilon) (\gamma) (\delta)$ son paralelos a una misma dirección D. Si en tal caso cortamos dichos planos por otro cualquiera P, no paralelo a la recta D, las cuatro trazas $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ (fig. 64) de los que representen una solución pasarán por un punto M, y la clave del ábaco será ver el punto de intersección de las rectas acotadas α, ϵ, γ y leer la cota de la recta del sistema (γ) que pase por M.

Mas si en este caso consideramos hecha la sustitución de las redes (α) por curvas acotadas $[\alpha]$, sobre cuatro planos paralelos cualesquiera $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ y P_δ (figura 65) cuyas distancias AB, BC, CD guarden entre sí una relación determinada, los puntos cuyas cotas sean una solución $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, estarán en un mismo plano $AQH\alpha'$, que cortará a los $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, P_\delta$ según rectas parale-

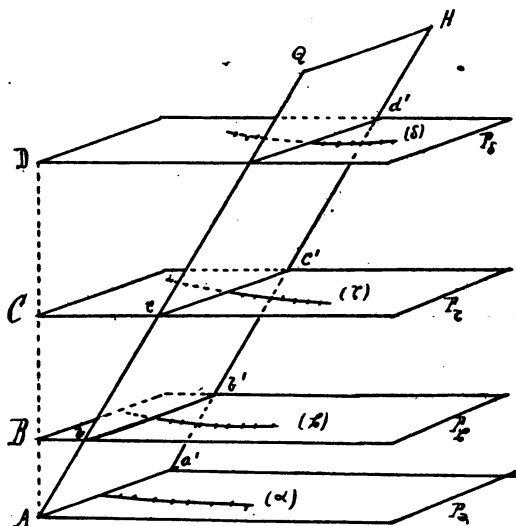


Fig. 65.

las Aa', bb', cc' y dd' . Luego, proyectando el sistema sobre un plano P paralelo a los dados, se obtendrá un nomograma (fig. 66) tal que, cuatro rectas A_1M_1, b_1N_1, c_1R_1 y d_1S_1 paralelas a una dirección y que pasen por los puntos $M_1N_1R_1S_1$ cuyas cotas representan una solución $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, determinarán sobre otra recta A_1d_1 segmentos A_1b_1, b_1c_1 y c_1d_1 ; que estarán en la misma relación de las distancias AB, BC y CD de los planos primitivos.

Para realizar la clave del nomograma en la práctica, se dispondrá un transparente (fig. 67) en el que se tra-

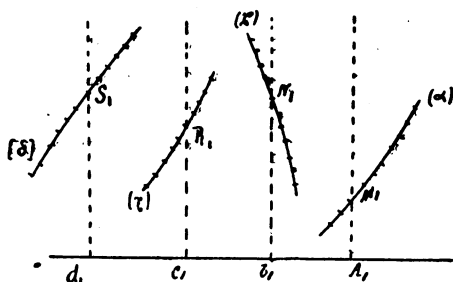


Fig. 66.

zarán una recta AX, y una serie de perpendiculares a ella que se acotarán con los números 0, 1, 2, 3..... Supo-

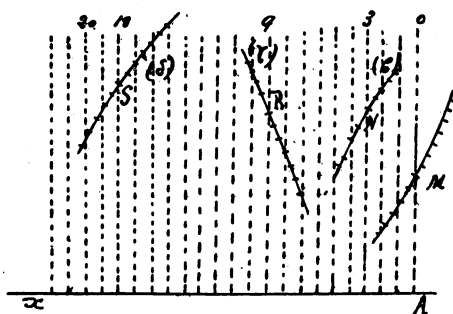


Fig. 67.

niendo ahora, por ejemplo, que la incógnita es z y que tomando AB por unidad (fig. 65) resulta, verbigracia,

$$BC = 2. AB \quad CD = 3. AB$$

se hará pasar el índice 0 del transparente por el valor M, dado, de α , orientándolo después de manera que dos de las paralelas pasen por los valores N y R, tam-

bién dados, de ϵ y γ . Es claro que entonces, si es, por ejemplo, el índice de cota 3 el que pasa por N, será el índice de cota $3 + 2 \times 3 = 9$ el que pase por R, y *deberá ser* el de cota $9 + 3 \times 3 = 18$ quien marque por su intersección con la curva $[\epsilon]$ el valor S de dicha variable que se busca.

A estos nomogramas se les llama *proporcionales*, y puede haber en ellos diversas claves, algunas muy sencillas.

a). Cuando las distancias AB, BC, CD *son iguales*,

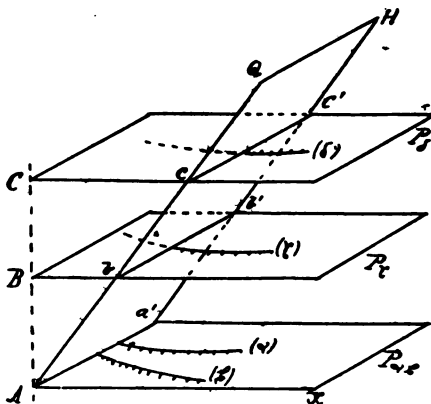


Fig. 68.

basta, después de orientar el transparente de modo que tres de sus índices pasen por M, N y R, leer en la curva $[\epsilon]$ con el índice cuyo número sea tres veces mayor que el N; la cota del índice que pasa por R tendrá que ser doble de la del N.

b). Los cuatro planos P_α , P_ϵ , P_γ y P_δ se reducen a tres, $P_{\alpha\epsilon}$, P_γ y P_δ (fig. 68). Entonces en el plano $P_{\alpha\epsilon}$ están las curvas $[\alpha]$ y $[\epsilon]$, y la recta Aa' que une dos puntos de cotas α_1 , ϵ_1 es paralela a las bb' y cc' que pasan

por los puntos de cotas z_1 y γ_1 , siendo $(\alpha, \epsilon, \gamma, z_1)$ una solución de $F(\alpha \epsilon \gamma z) = 0$.

La clave del nomograma, proyectado sobre AX, se

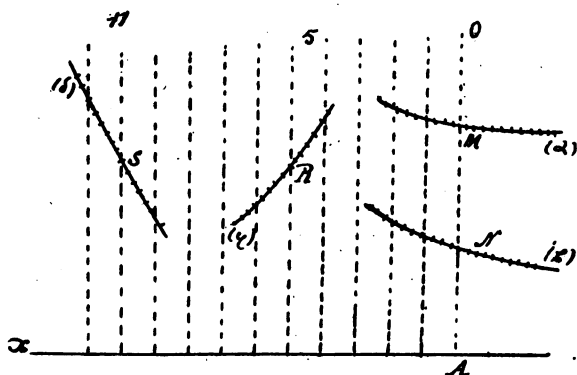


Fig. 69.

simplifica, pues si se hace pasar el índice de cota 0 (figu-

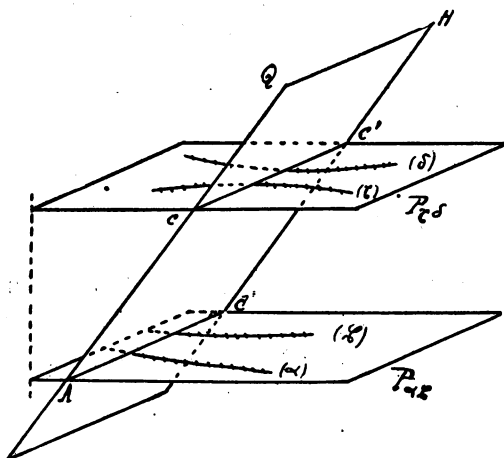


Fig. 70.

ra 69) por los valores M y N de $[\alpha]$ y $[\epsilon]$, quedará orientado el transparente, y las cotas de los índices que pasen

por R y S deberán estar en relación numérica $\frac{AB}{BC} = K$.

c). Si los cuatro planos de la figura 66 se reducen a dos $P_{\alpha\epsilon}$ y $P_{\gamma\delta}$ (fig. 70), las dos curvas $[\alpha][\epsilon]$ estarán en el primero, y en el segundo las $[\gamma][\delta]$, resultando al proyectar sobre AX que serán paralelas las rectas Aa' y bb' , que unen, respectivamente, los valores que representan una solución de la propuesta. Estos nomogramas se llaman de *doble alineación paralela* y su clave es la sencillísima indicada en la figura 71.

d). Si en el caso anterior hacemos girar 90° el sis-

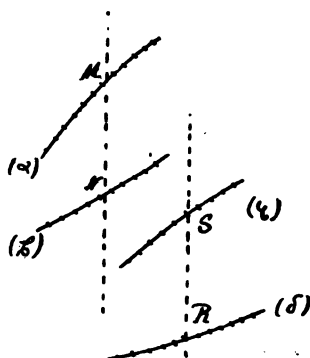


Fig. 71.

tema de curvas $[\gamma][\delta]$ con respecto al $[\alpha][\epsilon]$, las rectas MN y RS que unen valores correspondientes de las variables serán perpendiculares, resultando un nomograma llamado de *doble alineación a escuadra*, cuya clave es la indicada en la figura 72, y en el que se lee con un transparente donde se trazan de antemano dos índices perpendiculares.

Como puede verse, estas dos últimas clases de nomogramas son las más cómodas en la práctica, pues permiten casi siempre una buena disposición de las escalas

desde el momento en que el paralelismo o perpendicularidad de las alineaciones no se altera, aunque se desplace cualquiera de los sistemas (α) (ϵ) o (γ) (δ) paralelamente a sí mismo.

Conviene, por tanto, ver los tipos generales de ecuaciones que pueden ser representadas por este procedimiento, dentro, desde luego, de la condición fundamental indicada más arriba

$$F(\alpha\epsilon) = F(\gamma\delta)$$

es decir, que sea posible transformar la propuesta

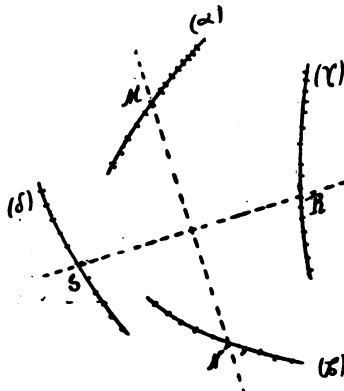


Fig. 72.

$F(\alpha\epsilon\gamma\delta) = 0$ de manera que estén en un solo miembro dos de las variables, y en el otro las otras dos.

23.—En la hipótesis de que los cilindros sean planos, y las redes (α) (ϵ) (γ) (δ) rectilíneas por tanto, y suponiendo para mayor generalidad que los (α) (ϵ) son paralelos a la recta

$$y = mz$$

situada en el plano YOZ, y los (γ) (δ) a la recta

$$y = nz$$

también situada en dicho plano, podremos escribir los cuatro grupos de ecuaciones representativas de cada sistema de planos, bajo la forma

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad f_1 x + \varphi_1 y + m \varphi_1 z + \psi_1 = 0 \\ (\epsilon) \quad f_2 x + \varphi_2 y + m \varphi_2 z + \psi_2 = 0 \\ (\gamma) \quad f_3 x + \varphi_3 y + n \varphi_3 z + \psi_3 = 0 \\ (\delta) \quad f_4 x + \varphi_4 y + n \varphi_4 z + \psi_4 = 0 \end{array} \right\} \quad [A]$$

por lo que la condición para que exista una solución común viene expresada por el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & m \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & m \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & n \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & n \varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0$$

que podemos perfectamente multiplicar, si hace falta, por parámetros arbitrarios que no alteren las soluciones del sistema (A). Es claro entonces que si $F(\alpha \epsilon \gamma \delta)$ puede identificarse con la $D = 0$, aquélla será representable por los grupos de planos considerados.

Las trazas de los planos (α) (ϵ) sobre el plano XY serán (fig. 61)

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad f_1 x + \varphi_1 y + \psi_1 = 0 \\ (\epsilon) \quad f_2 x + \varphi_2 y + \psi_2 = 0 \end{array} \right\} \quad a$$

y las de los planos (γ) (δ) sobre el coordenado XZ serán

$$\left. \begin{array}{l} (\gamma) \quad f_3 x + n \varphi_3 z + \psi_3 = 0 \\ (\delta) \quad f_4 x + n \varphi_4 z + \psi_4 = 0 \end{array} \right\} \quad b$$

La recta intersección de dos planos (α)(ϵ) cualesquiera, tendrá por proyección Mm sobre el plano XZ

$$(m\varphi_1\varphi_2 - m\varphi_2\varphi_1)z + (f_1\varphi_2 - \varphi_1f_2)x + (\psi_1\varphi_2 - \varphi_1\psi_2) = 0$$

o sea

$$x = - \frac{\psi_1\varphi_2 - \varphi_1\psi_2}{f_1\varphi_2 - \varphi_1f_2} \quad [a']$$

y la recta intersección de dos planos (γ)(δ) correspondientes tendrá por proyección Nm sobre el plano XY

$$(f_3n\varphi_4 - n\varphi_3f_4)x + (\varphi_3n\varphi_4 - \varphi_4n\varphi_3)y + (\psi_3n\varphi_4 - \varphi_3n\psi_4) = 0$$

o sea

$$x = - \frac{\psi_3\varphi_4 - \varphi_3\psi_4}{f_3\varphi_4 - \varphi_3f_4} \quad [b']$$

obteniéndose por cualquiera de las ecuaciones (a') o (b') el punto correspondiente de la escala binaria OX . Como puede observarse, al igualar los valores (a') y (b') se obtiene la condición $D = 0$.

Cuando los cuatro sistemas de planos (A) sean paralelos a una misma recta $y = mz$ situada en el plano YOZ , $n = m$, y las trazas de los cuatro sistemas de planos sobre el XOY , verbigracia, serán

$$\begin{aligned} [\alpha] \quad f_1x + \varphi_1y + \psi_1 &= 0 \\ [\epsilon] \quad f_2x + \varphi_2y + \psi_2 &= 0 \\ [\gamma] \quad f_3x + \varphi_3y + \psi_3 &= 0 \\ [\delta] \quad f_4x + \varphi_4y + \psi_4 &= 0 \end{aligned}$$

el punto de intersección de dos de las rectas $[\alpha]$ y $[\epsilon]$ tendrá por coordenadas

$$x = \frac{\psi_1\varphi_2 - \varphi_1\psi_2}{f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1} \quad y = \frac{f_1\psi_2 - \psi_1f_2}{f_1\varphi_2 - \varphi_1f_2}$$

y el de intersección de dos de las rectas $[\gamma]$ y $[\delta]$

$$x' = \frac{\psi_3 \varphi_4 - \varphi_3 \psi_4}{f_3 \varphi_4 - \varphi_3 f_4} \quad y' = \frac{f_3 \psi_4 - \psi_3 f_4}{f_3 \varphi_4 - \varphi_3 f_4}$$

viéndose que si $x = x'$, $y = y'$, se verifica también la condición $D = 0$.

Supongamos en este caso que las trazas $[\alpha]$ estén en el plano $z = p$, las $[\epsilon]$ en el $z = q$, las $[\gamma]$ en el plano $z = r$ y las $[\delta]$ en el plano $z = s$; si sustituimos dichas redes de rectas por curvas acotadas, los cuatro puntos que constituyan una solución de la propuesta tendrán por coordenadas

$$[\alpha] \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_1}{\psi_1} \\ y = \frac{\varphi_1}{\psi_1} \\ z = p \end{array} \right. \quad [\epsilon] \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_2}{\psi_2} \\ y = \frac{\varphi_2}{\psi_2} \\ z = q \end{array} \right. \quad [\gamma] \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_3}{\psi_3} \\ y = \frac{\varphi_3}{\psi_3} \\ z = r \end{array} \right. \quad [\delta] \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{f_4}{\psi_4} \\ y = \frac{\varphi_4}{\psi_4} \\ z = s \end{array} \right.$$

y para que un plano cualquiera $AQH\alpha'$ (fig. 65) pase por los cuatro puntos $\alpha\epsilon\gamma\delta$, que constituyen una solución, deberá verificarse

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{f_1}{\psi_1} & \frac{\varphi_1}{\psi_1} & p & 1 \\ \frac{f_2}{\psi_2} & \frac{\varphi_2}{\psi_2} & q & 1 \\ \frac{f_3}{\psi_3} & \frac{\varphi_3}{\psi_3} & r & 1 \\ \frac{f_4}{\psi_4} & \frac{\varphi_4}{\psi_4} & s & 1 \end{vmatrix} = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & p \psi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & q \psi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & r \psi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & s \psi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0$$

razón por la cual toda ecuación $F(\alpha\epsilon\gamma\delta) = 0$, que pueda identificarse con la $\Delta = 0$, será representable por un nomograma proporcional, análogo al de la figura 66.

Si $p = q$ se obtendrá un nomograma como el de la figura 69 y, finalmente, si $p = q$, al mismo tiempo que $r = s$, se obtendrá un nomograma de doble alineación paralela o a escuadra; fácil es ver que entonces la condición $\Delta = 0$ equivale a la $D = 0$. Si $p = q = r = s$ las cuatro curvas acotadas estarán en un plano $z = p$; la propuesta se identificará con el determinante

$$\Delta = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 p \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & \psi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0$$

y tendremos la clave más sencilla de todas: la de cuatro puntos $\alpha \beta \gamma \delta$ en línea recta.

Finalmente, si consideramos las redes (a) sustituidas por dos curvas acotadas en el plano XY y las redes (b) por otras dos situadas en el plano XZ, los puntos que constituyen una solución de la propuesta tendrán por coordenadas

$$\begin{aligned} [\alpha] \begin{cases} x = \frac{f_1}{\psi_1} \\ y = \frac{\varphi_1}{\psi_1} \\ z = 0 \end{cases} \quad [\beta] \begin{cases} x = \frac{f_2}{\psi_2} \\ y = \frac{\varphi_2}{\psi_2} \\ z = 0 \end{cases} \quad [\gamma] \begin{cases} x = \frac{f_3}{\psi_3} \\ y = 0 \\ z = n \frac{\varphi_3}{\psi_3} \end{cases} \quad [\delta] \begin{cases} x = \frac{f_4}{\psi_4} \\ y = 0 \\ z = n \frac{\varphi_4}{\psi_4} \end{cases} \end{aligned}$$

y para que un plano cualquiera pase por los cuatro puntos $\alpha \beta \gamma \delta$ deberá verificarse

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{f_1}{\psi_1} & \frac{\varphi_1}{\psi_1} & 0 & 1 \\ \frac{f_2}{\psi_2} & \frac{\varphi_2}{\psi_2} & 0 & 1 \\ \frac{f_3}{\psi_3} & 0 & n \frac{\varphi_3}{\psi_3} & 1 \\ \frac{f_4}{\psi_4} & 0 & n \frac{\varphi_4}{\psi_4} & 1 \end{vmatrix} = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & n \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & 0 & n \varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0$$

razón por la cual toda ecuación que pueda identificarse con la $\Delta_1 = 0$ será representable por un nomograma de doble alineación concurrente.

24.—Método práctico para la construcción de ábacos y nomogramas de ecuaciones de formas sencillas.— En general, si consideramos la ecuación

$$F(\alpha\epsilon) = F(\gamma\delta)$$

que puede expresarse por las dos de tres variables

$$[a] \quad F(\alpha\epsilon) = \mu \quad F(\gamma\delta) = \mu \quad [a']$$

bastará construir los ábacos $[a]$ y $[a']$ separadamente y *acoplarlos* por su escala μ para obtener el de la ecuación propuesta.

Los determinantes generadores serán

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & \psi_4 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose, en general, por el acoplamiento, un ábaco de alineación concurrente. Cuando las últimas horizontales de D_1 y D_2 sean de la forma

$$\begin{vmatrix} \mu & m & 0 \end{vmatrix}$$

la escala binaria μ resulta en el infinito y obtendremos un nomograma de doble alineación paralela o a escuadra.

1.º—Forma $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$. a). Doble alineación, concurrente.—Haciendo

$$f_1 + f_2 = \mu \quad f_4 + f_3 = \mu$$

se tiene

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & 1 & -1 \\ \mu & 0 & +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & -1 \\ -f_2 & 1 & -2 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_3 & 1 & -1 \\ -f_4 & 1 & -2 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

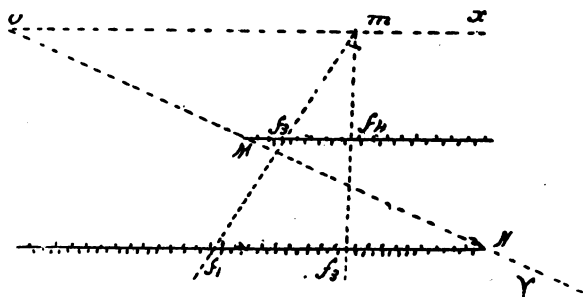


Fig. 73.

que da las rectas acotadas (fig. 73)

$$\begin{cases} x = -f_1 \\ y = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje X} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = -f_3 \\ y = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje de} \\ \text{las X} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} f_2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje X} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} f_4 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje de} \\ \text{la X} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \end{array} \right.$$

Ejemplo.—Sea la ecuación

$$V = m \frac{\pi d^2}{4} h = 0,785 m d^2 h$$

que expresa los volúmenes:

de un cilindro para.	$m = 1$
de un cono.	$m = 0,333$
de un paraboloide apolónico (1)..	$m = 0,500$
de un íd. de Neil (2)..	$m = 0,250$
de un íd. cúbico.	$m = 0,600$
de un elipsoide.	$m = 0,666$

Tomando logaritmos se convierte en

$$\log V - \log m = \log 0,785 + 2 \log d + \log h$$

que es de la forma propuesta haciendo

$$f_1 = \log V \quad f_2 = -\log m \quad f_3 = \log 0,785 + 2 \log d \quad \text{y} \quad f_4 = \log h.$$

En la figura 74 (lámina XVI) se ha construido este nomograma; la solución que en él aparece dibujada corresponde al ejemplo $m = 0,333$, $d = 3$, $h = 6$; resultando $V = 14,5$.

b). *Doble alineación paralela y a escuadra.*—Las ecuaciones que consideramos, se identifican con los determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 1 & 1 & f_2 \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_3 \\ 1 & 1 & f_4 \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 0$$

(1) Engendrado por la parábola $y^2 = 2px$, que gira alrededor de su eje.

(2) Engendrado por la parábola $y^2 = 2px^2$, que gira alrededor de su eje.

(3) Engendrado por la parábola $y^3 = 2px$, que gira alrededor de su eje.

que dan las rectas acotadas (fig. 75).

$$\begin{array}{ll} x = -f_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right. & x = -f_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right. \\ x = f_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al mismo} \\ y = 1 \end{array} \right. & x = f_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al íd.} \\ y = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

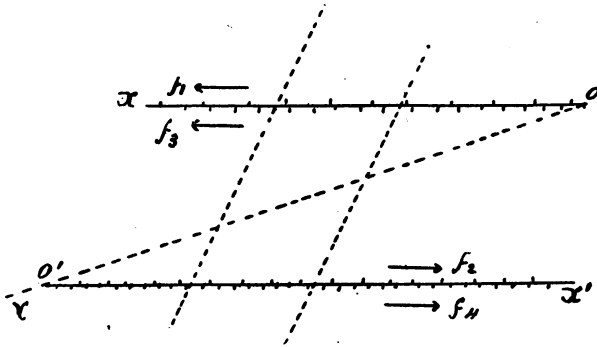


Fig. 75.

con la ventaja de que, si no quieren ponerse las escalas sobre el mismo soporte, puede moverse el sis-

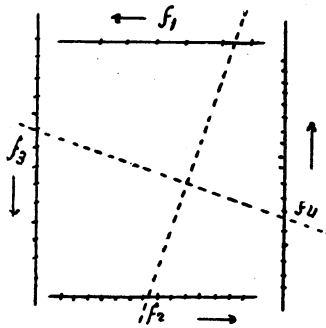


Fig. 76.

tema ($f_3 f_4$), por ejemplo, paralelamente a sí mismo, sin que dejen de ser también paralelas las alineaciones ($f_1 - f_2$) y ($f_3 - f_4$).

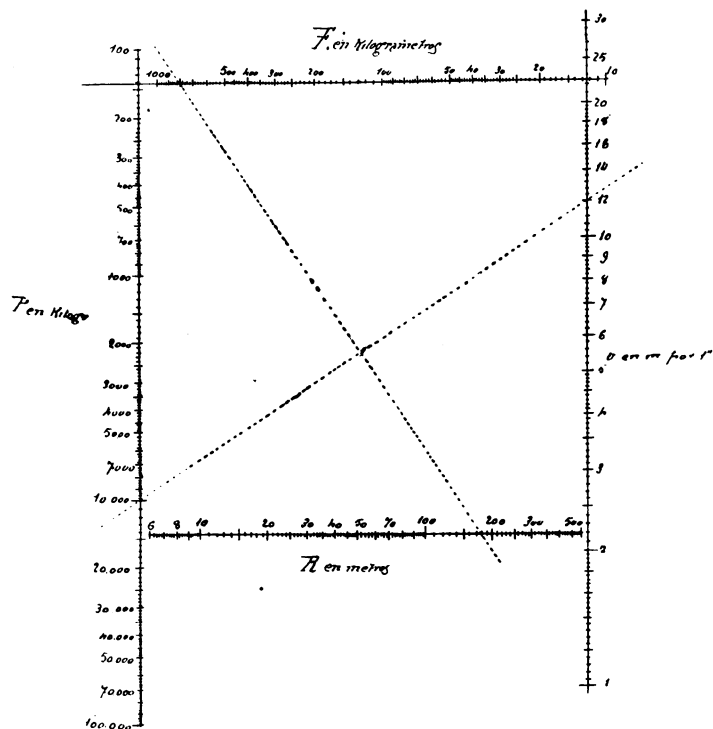


Fig. 77.—Fuerza centrífuga.—Ecuación: $F = \frac{P v^2}{9,81 \cdot R}$.

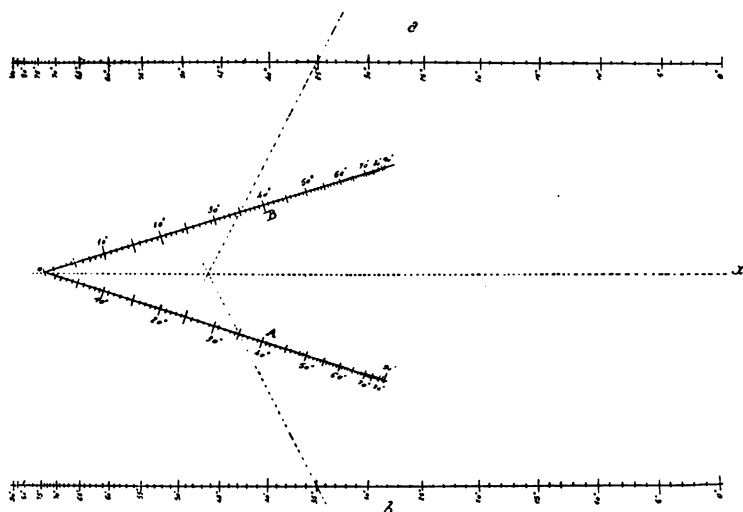


Fig. 79.—Ecuación: $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$.

Haciendo del mismo modo girar 90° el sistema f_1-f_2 con respecto al f_3-f_4 , se obtiene el nomograma a escuadra indicado esquemáticamente en la figura 76.

Ejemplo.—Sea la ecuación, conocidísima en mecánica.

$$F = \frac{Pv^2}{gR}$$

que da el valor F de la fuerza centrífuga, siendo P el peso de un vehículo, v su velocidad en la curva de radio R y g la aceleración de la gravedad, cuyo valor es 9,81. Se tiene, tomando logaritmos

$$\log F + \log 9,81 + \log R = \log P + 2 \log v.$$

Con esta ecuación se ha construido el nomograma a escuadra que aparece en la figura 77 (lámina XIX), haciendo

$$f_1 = \log F \quad f_2 = \log 9,81 + \log R, \quad f_3 = \log P \quad f_4 = \log v.$$

2.º *Forma $f_1 f_2 = f_3 f_4$.*—Se reduce por anamorfosis logarítmica al caso estudiado, por lo cual es siempre representable por nomogramas de doble alineación concurrente, perpendicular y a escuadra. Mas, observando que puede cada uno de sus miembros identificarse con un determinante de la forma

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 1 \\ 0 & f_2 & f_2 - 1 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3 & 1 & 1 \\ 0 & f_4 & f_4 - 1 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

obtendremos, sin *anamorfosis*, un nomograma de alineación concurrente dado por las redes

$$\begin{array}{ll} x = f_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje de} \\ y = 1 \end{array} \right\} \text{ las X} & x = f_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje de} \\ y = 1 \end{array} \right\} \text{ las X} \\ x = 0 \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las Y} \\ y = \frac{f_2}{f_2 - 1} \end{array} \right\} & x = 0 \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las Y} \\ y = \frac{f_4}{f_4 - 1} \end{array} \right\} \\ x = \mu \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right\} & x = \mu \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

cuyo esquema aparece en la figura 78 suponiendo que

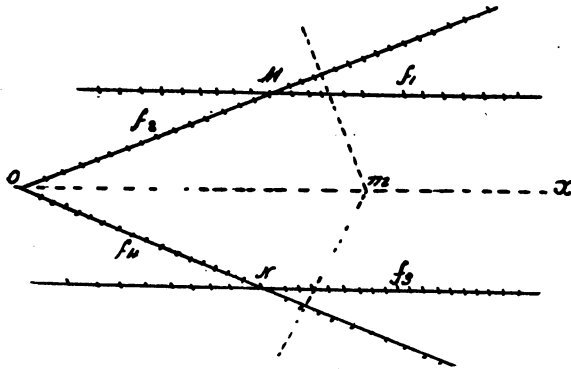


Fig. 78.

los soportes de las escalas f_2 y f_4 se han construido simétricamente a los de las escalas f_1 y f_3 .

Ejemplo. — Sea la ecuación fundamental para la solución de triángulos esféricos

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

que, puesta bajo la forma

$$\text{sen } a \text{ sen } B = \text{sen } b \text{ sen } A$$

se identifica perfectamente con la propuesta. Observando que los determinantes generadores pueden ser

$$D_1 = \begin{vmatrix} \text{sen } a & -1 & -1 \\ 0 & \text{sen } B & 1 + \text{sen } B \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y

$$D_2 = \begin{vmatrix} \text{sen } b & -1 & -1 \\ 0 & \text{sen } A & 1 + \text{sen } A \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

se tendrá el nomograma de la figura 79 (lámina XIX) compuesto de las escalas naturales $a = 0^m,20 \text{ sen } a$, $b = 0^m,20 \text{ sen } b$, y de las lineales

$$B = 0^m,20 \frac{\text{sen } B}{1 + \text{sen } B} \quad \text{y} \quad A = 0^m,20 \frac{\text{sen } A}{1 + \text{sen } A}$$

cuya escala binaria es MX.

Para obtener sin anamorfosis un nomograma de alineaciones paralelas o a escuadra, basta tomar como determinantes generadores los

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -f_4 \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que dan las redes

$$\left. \begin{array}{l} x = f_1 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = -\frac{1}{f_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ \\ \\ \text{Eje de las Y} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = f_3 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = -\frac{1}{f_4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ \\ \\ \text{Eje de las Y} \end{array}$$

cuyo esquema aparece en la figura 80, después de haber trasladado paralelamente a sí mismos los soportes de las escalas f_3 y f_4 . Haciendo girar 90° el sistema $(f_3 f_4)$

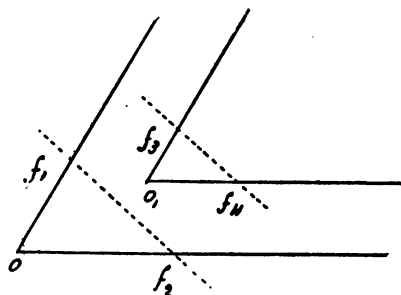


Fig. 80.

con respecto al $(f_1 f_2)$ se obtienen los nomogramas a esquadra representados en las figuras 81 y 82, sumamente

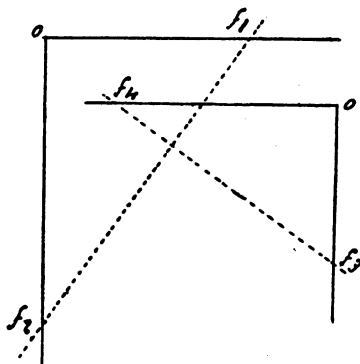


Fig. 81.

adaptables a cualquier tamaño cuando los ejes son rectangulares. Cuando por particularidades de las funciones f_2 y f_4 no convenga construir sus inversas, fácil es

LÁMINA XX

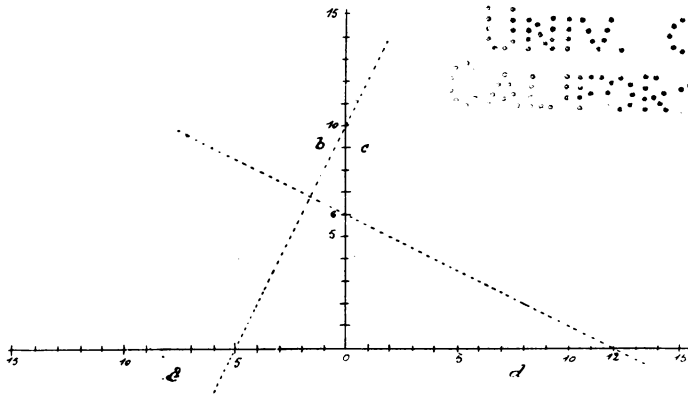


Fig. 83.—Ecuación: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

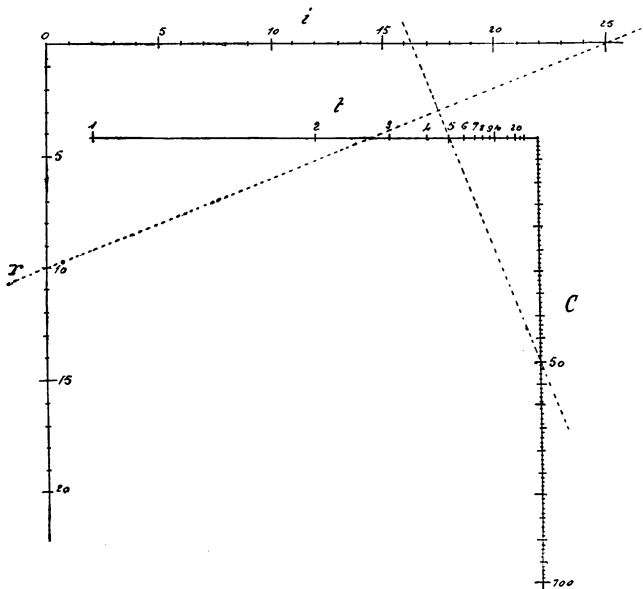


Fig. 84.—Interés simple.—Ecuación: $i = \frac{crt}{100}$.

ver que la ecuación propuesta puede ponerse bajo la forma

$$\frac{f_1}{f_4} = \frac{f_3}{f_2} \quad \text{o sea} \quad f_1 \times \frac{1}{f_4} = f_3 \frac{1}{f_2}$$

que da las escalas f_1 y f_3 según los ejes de las X, y las f_4 y f_2 según los de las Y, en sentido negativo. Convendrá también, para poder elegir los módulos más convenientes, fijarse en que si m_1 y m_2 son los elegidos para las escalas de f_1 y f_2 , los de f_3 y f_4 deben ser km_1

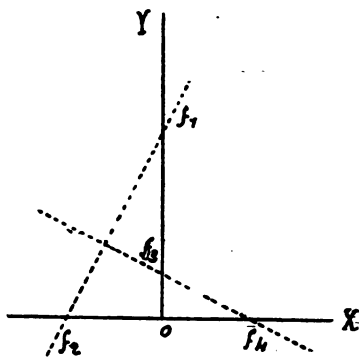


Fig. 82.

y km_2 respectivamente, sin lo cual introduciríamos factores desiguales en los miembros de la ecuación propuesta.

Ejemplos.—1.º Calcular un número, medio, tercero o cuarto proporcional a otros dados. Evidentemente están contenidos todos los casos en el nomograma de la ecuación

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

sin más que hacer $b = c$. El nomograma de la figura 83 (lámina XX), sencillísimo de construir para que nos detengamos en su explicación, puede servir de ejercicio para resolver los tres problemas.

2.º La fórmula que da el interés simple i de un capital C colocado durante un cierto tiempo t al tanto por ciento r , es, como sabemos,

$$i = \frac{Crt}{100}$$

que puede escribirse

$$i \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{t}{100}$$

y da el nomograma a escuadra de la figura 84 (lámina XX), formado por las escalas naturales i y $\frac{100}{t}$ según

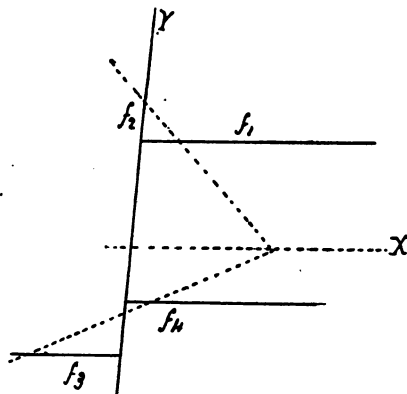


Fig. 85.

el eje de las X , y las r y C a uno y otro lado del eje de las Y .

3.º Forma $f_1 = f_2 (f_3 + f_4)$.—Transformando esta ecuación en la

$$\frac{f_1}{f_2} = \mu = f_3 + f_4$$

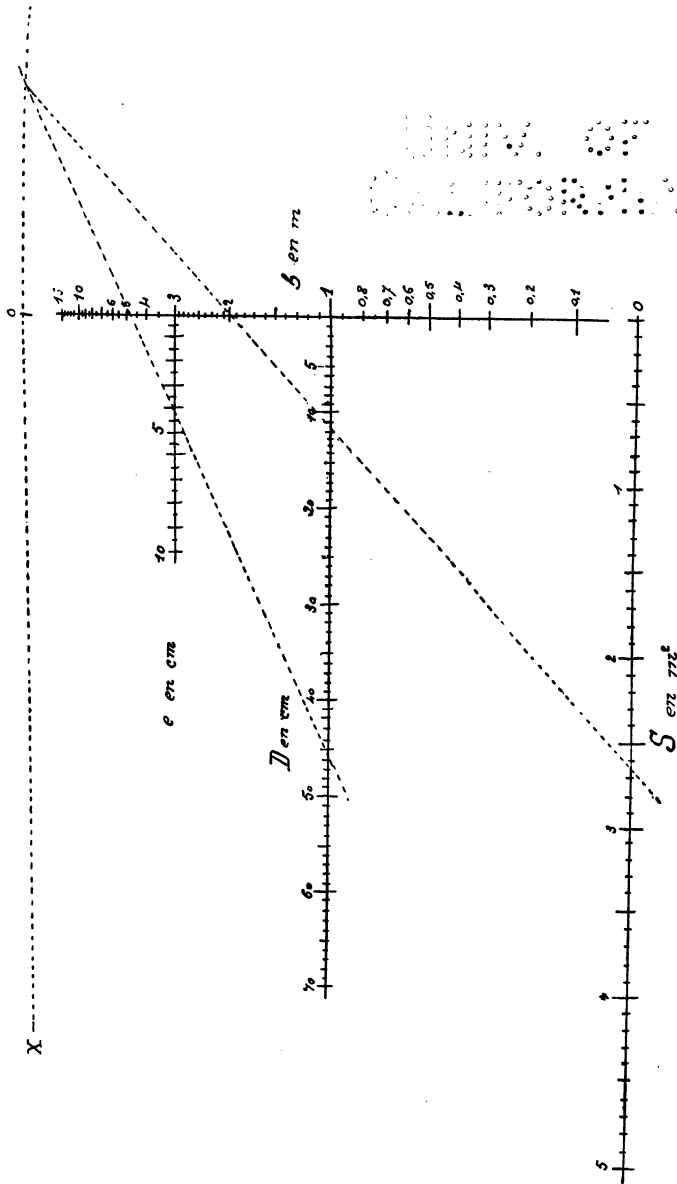


Fig. 88.—Área descortezable de un árbol.

Ecuación: $S = \pi \cdot h \cdot (D - e)$

se ve que puede representarse por los determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - f_2 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_3 & 1 - 1 \\ -f_4 & 1 - 2 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que dan el ábaco de doble alineación *concurrente* cuyo esquema aparece en la figura 85, formado por las escalas

$$\begin{array}{ll} x = f_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje X} \\ y = 1 \end{array} \right. & x = -f_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje X} \\ y = 1 \end{array} \right. \\ x = 0 \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las Y} \\ y = \frac{1}{1 - f_2} \end{array} \right. & x = \frac{1}{2} f_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralela al eje X} \\ y = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ x = \mu \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right. & x = \mu \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de las X} \\ y = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ejemplo.—La *superficie descorchable* S de un alcornoque cuyo tronco tenga la altura h , diámetro D, medido a la altura del pecho, y espesor e de la capa de corcho, se obtiene por la fórmula

$$S = \pi h (D - e)$$

que tiene la forma propuesta, haciendo $f_1 = S$, $f_2 = h$, $f_3 = \pi D$ y $f_4 = \pi e$ y cuyo nomograma aparece en la figura 86 (lámina XXI), construido con los determinantes generadores

$$D_1 = \begin{vmatrix} S & 10 & -1 \\ 0 & 10 & -(1 + h) \\ \mu & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad D_2 = \begin{vmatrix} \pi D & 5 & -1 \\ \pi e & 5 & -2 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que dan las escalas

$$\begin{array}{ll}
 (S) \begin{cases} x = -S \\ y = -10 \end{cases} & (D) \begin{cases} x = -\pi D \\ y = -5 \end{cases} \\
 (h) \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{10}{1+h} \end{cases} & (e) \begin{cases} x = -\pi e \\ y = -2,5 \end{cases} \\
 OX \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \end{cases} & OX \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

b). *Doble alineación paralela o a escuadra.*—Se

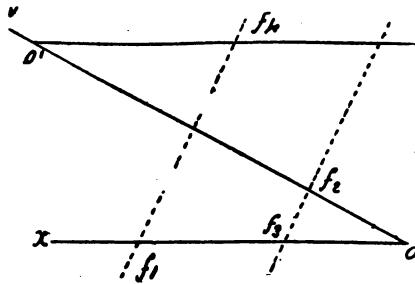


Fig. 87.

obtiene identificando la forma propuesta con los determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} -f_1 & 0 & 1 \\ 0 & f_2 & 1 \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -f_3 & 0 & 1 \\ f_4 & 1 & 1 \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que dan las escalas

$$\begin{array}{ll}
 \begin{cases} x = -f_1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ Eje de las X} & \begin{cases} x = -f_3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ Eje de las X} \\
 \begin{cases} x = 0 \\ y = f_2 \end{cases} \text{ Eje de las Y} & \begin{cases} x = f_4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ Paralela al eje de las X}
 \end{array}$$

y un nomograma de doble alineación paralela en forma de Z, como se ve en la figura 87, o a escuadra, como aparece esquemáticamente en la figura 88.

LÁMINA XXII

UNIV. OF
CALIFORNIA

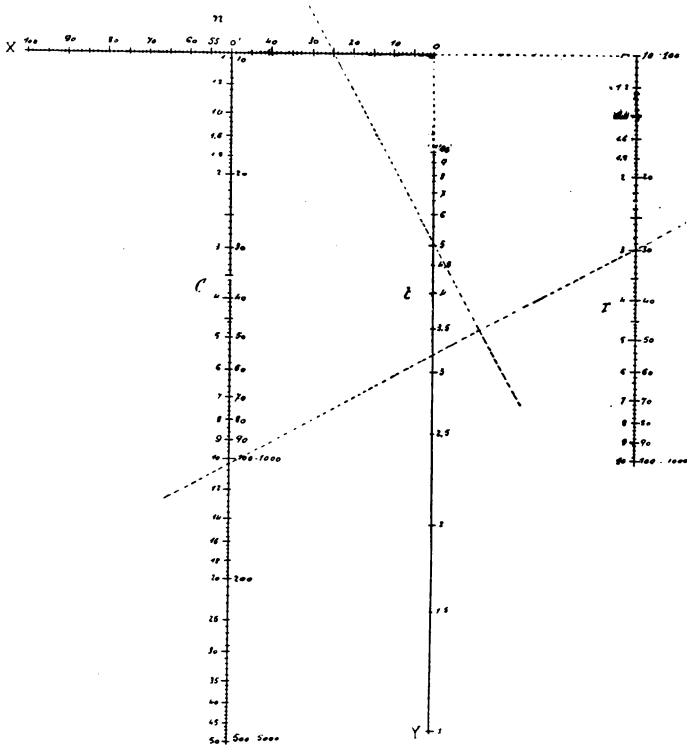


Fig. 89.—Fórmula de interés compuesto.

Ecuación: $C = r(1 + t)^n$.

Ejemplo.—La fórmula del interés compuesto

$$C = r(1+t)^n$$

que da el valor C de un capital r , colocando al tanto por ciento t , durante un número de años n , puede transformarse en la

$$\log C - \log r = n \log (1+t)$$

que es de la forma propuesta, haciendo $n = \frac{1}{f_2}$. Para construir el nomograma a escuadra de la figura 89 (lá-

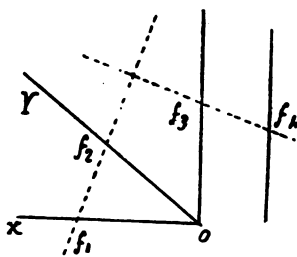


Fig. 88.

mina XXII) nos hemos valido de los determinantes generadores

$$D_1 = \begin{vmatrix} n & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -10 \log(1+t) \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} -\log C & 0 & 1 \\ -\log r & 10 & 1 \\ \mu & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que dan la escalas

- (n) $\left\{ \begin{array}{l} x=0, 1 \cdot n \\ y=0 \end{array} \right\}$ Eje de las X
- (t) $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{1}{10 \log(1+t)} \end{array} \right\}$ Eje de las Y
- (C) $\left\{ \begin{array}{l} x=-\log C \\ y=0 \end{array} \right\}$ Perpendicular al eje de las X
- (r) $\left\{ \begin{array}{l} x=-\log r \\ y=10 \end{array} \right\}$ Paralela a la anterior a la distancia 10.

Para dar disposición más cómoda al nomograma se ha desplazado hacia la izquierda el origen O' del sistema de coordenadas correspondiente a las variables C y r , lo que, como puede comprenderse, no altera en nada la perpendicularidad de las alineaciones.

4°. *Observaciones sobre los módulos de las escalas.*—

a). Cuando se trata de la primera de las formas estudiadas, $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$, sabemos que su nomograma equivale al de las dos ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} f_1 + f_2 &= \mu \\ f_3 + f_4 &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

y si recordamos (n.º 16) que, siendo m_1, m_2, m_3 los módulos elegidos para las variables en ecuaciones de la forma (a), debe verificarse

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3}$$

es evidente, puesto que la escala μ debe ser idéntica en ambas ecuaciones, la condición

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

entre los módulos m_1, m_2, m_3 y m_4 de las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4 .

b). Cuando se trata de la forma $f_1 f_2 = f_3 f_4$, ya hemos visto queda reducido el caso a construir los nomogramas

$$\frac{f_1}{f_4} = \mu \quad \text{y} \quad \frac{f_3}{f_2} = \mu$$

por lo que, llamando $m_1, m_2, \dots$ a los módulos respecti-

vos, para que haya coincidencia en la escala binaria μ debe verificarse (n.º 17)

$$\frac{m_1 \mu}{m_4 + m_1 \mu} = \frac{m_3 \mu}{m_2 + m_3 \mu}$$

de donde se deduce

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{m_4 + m_1 \mu}{m_2 + m_3 \mu}$$

o sea

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 \mu = m_3 m_4 + m_1 m_3 \mu$$

que da la condición

$$m_1 m_2 = m_3 m_4$$

es decir,

$$\frac{m_1}{m_4} = k = \frac{m_3}{m_2}$$

que, evidentemente, se satisface siempre que

$$\begin{aligned} m_1 &= k m_4 \\ m_3 &= k m_2 \end{aligned}$$

siendo k un número cualquiera.

c). Finalmente, si la ecuación dada es de la forma $f_1 = f_2 (f_3 + f_4)$, y suponemos elegidos los módulos m_1, m_2 para f_1, f_2 , se ve que el determinante D_1 deberá ser, según la clave que se elija,

$$D_1 = \begin{vmatrix} m_1 f_1 & 1 & m_2 \\ 0 & 1 & m_2 - m_2 f_2 \\ m_1 \mu & 0 & m_2 \end{vmatrix} = 0 = m_1 m_2 D_1$$

o

$$D_2 = \begin{vmatrix} -m_1 f_1 & 0 & 1 \\ 0 & m_2 f_2 & 1 \\ m_1 \mu & m_2 & 0 \end{vmatrix} = m_1 m_2 D_1$$

lo que implica, si se ha verificado la propuesta, la condición

$$D_2 = \begin{vmatrix} m_1 f_3 & m_2 & -1 \\ -m_1 f_4 & m_2 & -2 \\ m_1 \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = m_1 m_2 D_2$$

o

$$D_2 = \begin{vmatrix} -m_1 f_3 & 0 & 1 \\ m_1 f_4 & m_2 & 1 \\ m_1 \mu & m_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 = m_1 m_2 D_2$$

es decir, que f_3 y f_4 tengan el mismo módulo que f_1 , y, además, que los soportes de las escalas f_3 y f_4 sean, en la doble alineación concurrente, paralelas al eje X trazadas a las distancias m_2 y $\frac{m_2}{2}$, y, en el caso de doble alineación paralela o a escuadra, que el soporte de f_4 sea también una paralela al eje X a la distancia m_2 . Si quisiéramos adoptar un cierto módulo m_3 para f_3 y f_4 , distinto de m_1 , basta observar que, adoptándolo, los determinantes D_2 no se alteran, siempre que multipliquemos sus segundas columnas por $\frac{m_1}{m_3}$, lo que se reduce a trazar, en el primer caso, los soportes de f_3 y f_4 según paralelas distantes del eje X, las cantidades $\frac{m_2 m_1}{m_3}$ y $\frac{m_2 m_1}{2 m_3}$, y en el segundo caso el soporte de f_4 según otra paralela al mismo eje a la distancia $\frac{m_2 m_1}{m_3}$.

V.—NOMOGRAMAS DE ESCALAS MÓVILES

25.—Idea general.—Si en vez de enlazar por una construcción geométrica cualquiera los valores de las variables que satisfacen a la ecuación que deseamos resolver, hacemos que los sistemas representativos de aquéllas, *deslicen moviéndose* unos con respecto a otros, según ciertas leyes o condiciones, habremos obtenido una nueva serie de claves y tipos de nomogramas, que, en general, necesitan para poderse realizar en la práctica la ayuda de un sistema *mecánico* más o menos complicado; este es el origen de ciertos *aparatos de cálculo*, entre los cuales tienen importancia las llamadas *reglas o círculos de cálculo*, y algunos otros instrumentos como los notabilísimos de los señores Torres Quevedo (1), Mehmke, Lafay y otros. No siendo nuestro objeto tratar aquí más que de la parte elemental y sencilla de la Nomografía, sólo nos ocuparemos ligeramente de las reglas de cálculo.

26.—Reglas de cálculo.—*Materializan*, por decirlo así, o traducen geométricamente cualquier ecuación de la forma

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} = u_n \quad [1]$$

en que $u_1, u_2, \dots, u_n$ son funciones de variables distintas α, β, γ , cada una de las cuales tenga, a lo menos, un sistema que pueda representarla. Supongamos, en efec-

(1) Con ellos se resuelven ecuaciones de cualquier grado, obteniéndose todas las raíces, reales e imaginarias.

to, representada cada una de estas variables o sus funciones por una escala rectilínea, y que los orígenes de las escalas u_1, u_n (fig. 90), que supondremos trazadas sobre una regla de madera MM' , están situadas sobre una misma recta O_1O_n . Si trazamos las demás escalas $u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$ en otras reglillas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}$, tales que puedan moverse deslizando una sobre otra, dentro de la caja H, R, S, T abierta en la regla MM' , es evidente que si $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ son los valores de las variables $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$ (leídos en las escalas correspondientes) que satisfacen la ecuación [1], bas-

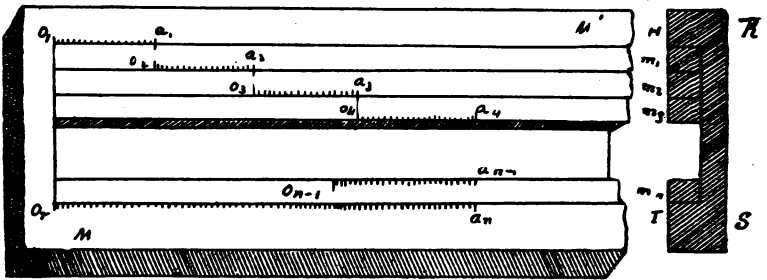


Fig. 90.

tará mover las reglillas de tal modo que los orígenes $O_2, O_3, \dots, O_4, \dots, O_{n-1}$ de las escalas respectivas, coincidan con los valores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$, para que, si se construye la escala u_n de manera que a_n coincida con a_{n-1} , se verifique

$$O_n a_n = O_1 a_1 + O_2 a_2 + O_3 a_3 + \dots + O_{n-1} a_{n-1}$$

o sea la ecuación propuesta [1].

a). *Regla logarítmica o regla de cálculo.*— Sirve para cualquier ecuación de la forma

$$\alpha \cdot \epsilon = \gamma$$

o, la que es igual,

$$\log \alpha + \log \epsilon = \log \gamma$$

y se compone de una *regla* MM' (fig. 91) dentro de la que desliza en una ranura la *reglilla* R. En el canto AB se dibuja la escala $\log \alpha$, o una escala de números naturales; en el canto BC la escala $\log \gamma$ u otra escala natural c , y en el A'B' de la reglilla un índice O_2 , que es el origen de la escala $\log \epsilon$ o de números b

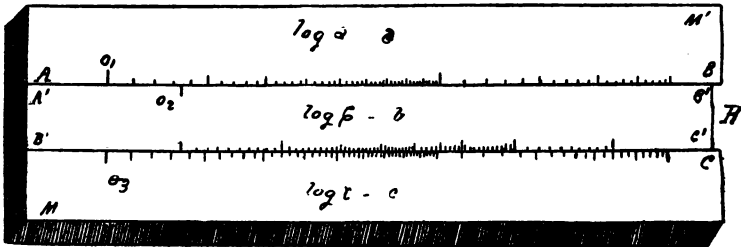


Fig. 91.

que se traza en el otro canto B'C' de la misma parte móvil. Moviendo esta reglilla de modo que O_2 coincida con el valor α_1 de α , el ϵ_1 de ϵ coincidirá con el γ_1 de γ , con lo que habremos hecho una multiplicación $\alpha \epsilon = \gamma$ si se emplearon escalas logarítmicas, o una suma $a + b = c$ si se emplearon escalas naturales. Si, por el contrario, se hace coincidir ϵ_1 con γ_1 y se lee el valor α_1 que cae sobre O_2 , habremos hallado el cociente $\frac{\gamma}{\epsilon} = \alpha$ si se empleó la escala logarítmica, o la diferencia $c - b$ si se emplearon las naturales.

El ser ya conocida la teoría, usos y aplicaciones de

esta regla nos dispensa aquí de mayores explicaciones (1).

b). *Reglas para cuatro variables.*—Sea la ecuación

$$\alpha \epsilon \gamma = \delta \quad [2]$$

o su derivada

$$\log \alpha + \log \epsilon + \log \gamma = \log \delta. \quad [3]$$

Según la teoría general, y puesto que se trata de cuatro variables, necesitaríamos para resolver las ecua-

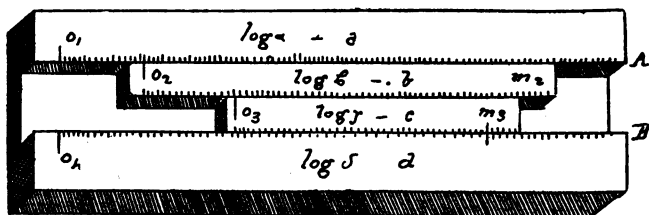


Fig. 92.

ciones [2] y [3] una regla con dos reglillas móviles (figura 92) $m_2 m_3$, que deslizaran entre los cantos $O_1 A$ y $O_4 B$ de la regla fija. Pero no es difícil llegar al mismo resultado con una sola reglilla móvil; si hacemos, en efecto (fig. 93), variando el sentido de la graduación de la escala ϵ , que los orígenes O_2, O_3 se encuentren en una misma recta O_2, O_3 paralela a la $O_1 O_4$, es claro que al coincidir los valores $\alpha_1 \epsilon_1$ por un lado y $\gamma_1 \delta_1$, por otro, que satisfagan las ecuaciones [2] y [3], ocurrirá siempre en la figura, que

$$O_1 \alpha_1 + \epsilon_1 O_2 + O_3 \gamma_1 = O_4 \delta_1$$

(1) Véase *Manual de la regla de cálculo*, por D. Guillermo Fernández de Prado; *Regla de cálculo logarítmico*, de D. Ramón Alcaide, y otros numerosos modelos y descripciones.

es decir, lo que expresa la fórmula [3] si se emplean escalas logarítmicas, o lo que expresa la (2) si se emplean escalas naturales.

Ejemplo.—1.º Sea la ecuación, ya conocida

$$V = m \frac{\pi d^2}{4} h = 0,785 m d^2 h$$

que da, como sabemos (n.º 24), diversos volúmenes según el valor de m , y que puede transformarse en la

$$\log V = \log m + \log h + 2 \log d + \log 0,785.$$

Se puede construir con ella la *regla de cubicación* (1) que aparece en la figura 94 (lámina XXIII) sin

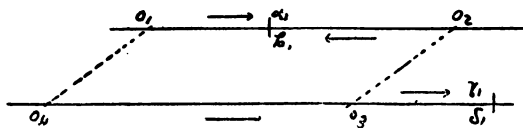


Fig. 93.

más que trazar en un canto de la regla la escala $\log m$; en el superior de la reglilla, y en sentido contrario, la $\log h$ de alturas y en los bordes restantes de la reglilla y de la regla, las $(\log 0,785 + 2 \log d)$ de diámetros y $\log V$ de volúmenes, respectivamente. Para usarla basta poner en coincidencia los valores $m - h$, o los $V - d$, y leer el de la incógnita en la escala correspondiente encima o debajo del trazo que corresponda al del tercero de los valores que sirvan de datos al problema.

2.º Sea la fórmula del interés compuesto

$$C = R(1 + i)^n$$

(1) Construída para aplicaciones forestales, por la casa Valluerca Hermanos, según las indicaciones del autor.

Para construir una regla que calcule esta fórmula, bastará, según el procedimiento general, una reglilla móvil (fig. 91) en que la escala BC será $\log C$, la B'C', $\log R$, y la AB, $n \log (1 + t)$. Pero observando que la escala AB es

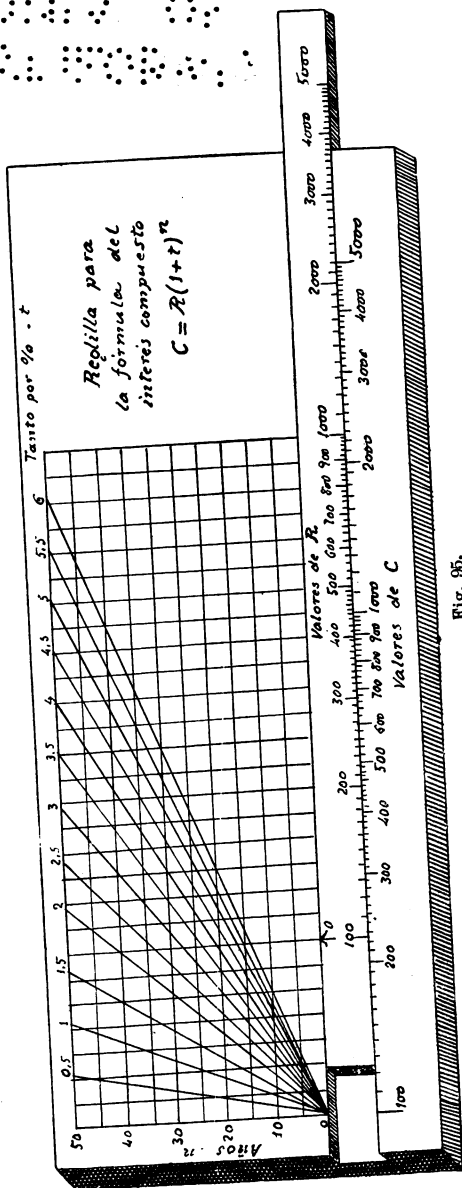
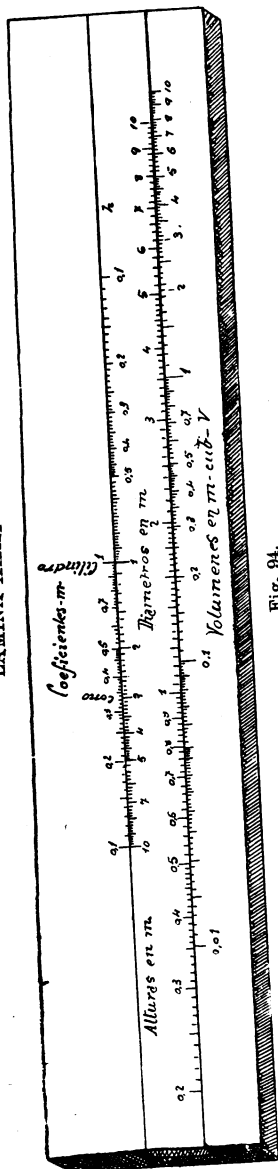
$$\alpha = n \cdot \log (1 + t)$$

es decir, el producto de n y $\log (1 + t)$, será preciso, si se quieren separar las variables, colocar un ábaco de multiplicación en la parte AM' de la regla, de modo que su escala α (n.º 9) coincida con la AB en el mismo sentido, y su módulo sea igual al que empleemos en las B'C' y BC.

Escogiendo al efecto el ábaco de multiplicación de la figura 28 (lámina VI) y haciendo que el índice O (fig. 95, lámina XXIII) coincida, por ejemplo, con el valor 100 de R de la escala inferior de la reglilla, hemos construido con módulo 0^m,10, la regla de cálculo que aparece dibujada en la figura y lámina citadas. Para usarla se buscará en el ábaco la intersección de la horizontal cuya cota sea el valor dado de n , con la oblicua cuya cota sea el valor de t y se moverá la reglilla hasta hacer coincidir el índice O, con la ordenada que pase por dicho punto de intersección. Debajo del valor de R leído en la escala correspondiente, se encontrará en coincidencia el de C que resuelve el problema. Fácil es ver que por análogo procedimiento puede hallarse cualquiera de las variables, tomada como incógnita.

Se comprende por el anterior ejemplo a cuántas combinaciones se presta el procedimiento indicado para resolver las fórmulas al parecer más complicadas, que se presentan en la práctica.

27.—Escalas giratorias.—a). *Círculos de cálculo.*—Si en lugar de dibujar las escalas sobre los bordes de una



o más reglillas móviles con respecto a otras fijas, se dibujan sobre varias circunferencias concéntricas que puedan moverse independientemente, resbalando unas sobre otras, alrededor del mismo centro, se obtienen también aparatos de cálculo análogos a las reglas, y que tienen la ventaja, cuando las escalas son logarítmicas y las variables se mueven en un campo muy extenso, de

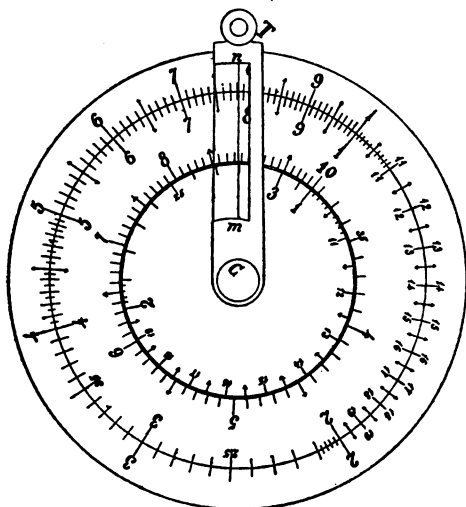


Fig. 96.

evitar la excesiva longitud que habría que dar a las reglas en este caso.

En la figura 96 copiamos el *círculo de cálculo* ordinario, cuya descripción y manejo puede verse en el «Manual» del Sr. Fernández de Prado, citado más arriba.

b). *Otros ábacos de escalas giratorias.*—Cualquier ábaco polar (n.º 11) puede fácilmente transformarse en otro compuesto de una escala rectilínea giratoria alre-

dedor del polo, que se apoya en un círculo acotado, y un haz de rectas o curvas acotadas. En efecto, si se trata de una ecuación $F(\alpha \epsilon \gamma) = 0$, sabemos puede representarse por las redes

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \rho = f(\alpha) \\ (\epsilon) \quad & \omega = \varphi(\epsilon) \\ (\gamma) \quad & \gamma = \psi(\rho \omega) \end{aligned}$$

que representan una serie de círculos cuyo centro es el polo, acotados según los valores de $f(\alpha)$, un haz de ra-

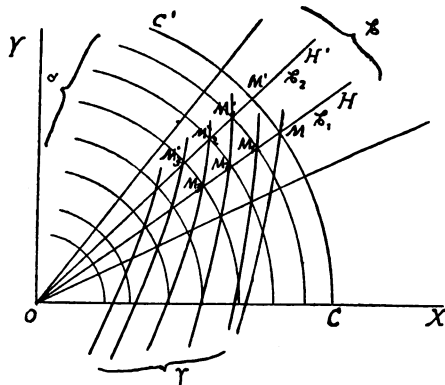


Fig. 97.

diantes acotado según los de $\varphi(\epsilon)$ y la serie de rectas o curvas acotadas contenidas en la ecuación (γ) (fig. 97). Un punto M cualquiera, intersección de tres elementos, cada uno de un sistema, da una solución de la propuesta en las cotas de estos tres elementos; mas si nos fijamos, verbigracia, en el radiante OH de cota ϵ_1 , y suponemos escrita esta cota en el punto M del círculo CC' (u otro cualquiera del sistema), es evidente que, acotando los puntos $M_1 M_2 M_3 \dots$ del radiante con los números correspondientes a cada uno de los círculos (α) , a la po-

punto del círculo CC' que lleva la cota ϵ_1 , y leer después la cota γ_1 del elemento del sistema (γ) que pasa por la cota α_1 de la escala OM.

Ejemplo.—Sea la ecuación $y = e^{\frac{x}{m}}$ que ya conocemos y sabemos se transforma en la

$$\log y = \frac{x}{m} \log e = 0,43427 \frac{x}{m}.$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x &= \cos \omega \\ \rho &= \frac{0,43427}{\log y} \end{aligned}$$

resulta

$$m = \rho \cos \omega$$

que es una serie de rectas perpendiculares al eje polar y acotadas con arreglo a los valores de m . Adoptando un radio de 10 unidades para $\cos \omega$ y con módulo 0^m,10 se ha construido el ábaco de la figura 99 (lámina XXIV), en el cual se representa la escala giratoria OM $\left(\rho = \frac{0,43427}{\log y} \right)$ en la posición correspondiente al valor $\omega = 60^\circ$, es decir, $x = 5$.

Por este ejemplo puede comprenderse la cantidad de aplicaciones sencillas e importantes que puede tener el procedimiento indicado.

LÁMINA XXIV

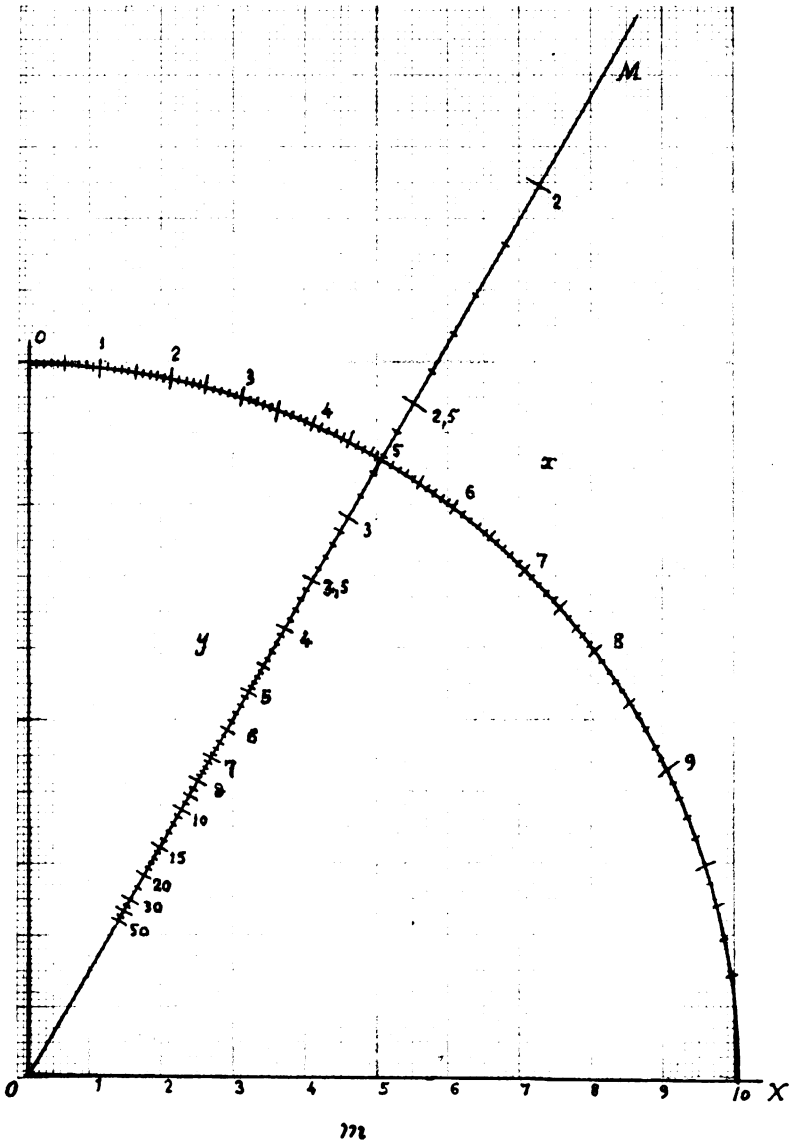


Fig. 99.—Ecuación $y = e^{\frac{x}{m}}$. Escala móvil OM.

VI.—INVESTIGACIÓN DE LEYES POR MEDIO DE LA NOMOGRAFÍA

28.—Nociones generales y métodos que se emplean.

Si hasta ahora y en todo lo expuesto hemos procurado resolver el problema de construir un ábaco o nomograma para resolver numéricamente una ecuación $F(\alpha \epsilon \gamma \dots) = 0$, se comprende es posible también abordar el problema inverso, o sea el de, dado un ábaco o nomograma construido con datos experimentales que nos hayan suministrado valores numéricos de las variables que entren en la cuestión, hallar la ecuación $F(\alpha \epsilon \dots) = 0$, o sea la ley, ya matemática, ya empírica, que las une. Por ejemplo, si experimentalmente hemos llegado a conocer una serie de valores $\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ de una variable ϵ , correspondientes a otros tantos $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ de otra variable α , podemos construir una curva (fig. 10) tomando como abscisas los valores de α y como ordenadas los correspondientes de ϵ ; si el estudio de esta curva puede llevarnos a conocer su ecuación $f(\alpha \epsilon) = 0$, habremos descubierto la ley de dependencia que liga a ϵ y α . Y este medio, el más sencillo y empleado constantemente en Geometría analítica, puede, como se comprende, generalizarse ampliándolo por los métodos de la Nomografía a tres, cuatro o un número mayor de variables. En efecto, podremos tratar de traducir los resultados experimentales por un ábaco compuesto de redes de rectas; hallaremos después los puntos correspondientes de las mismas (n.º 13) y es evidente que, si las rectas están distribuídas en el plano según una cierta ley, es-

tarán sobre una curva los puntos que las correspondan, y, por tanto, que el estudio analítico de esta curva podrá llevarnos al conocimiento de su ecuación y, por tanto, al de la ley de distribución buscada.

Aunque se ve, desde luego, el ancho campo que indudablemente tiene el procedimiento, sobre todo en las aplicaciones técnicas de la Ingeniería, no siempre se poseen en cantidad suficiente los datos experimentales necesarios, ni tampoco es fácil su traducción nomográfica, por lo que, dada la índole de esta obra, nos limita-

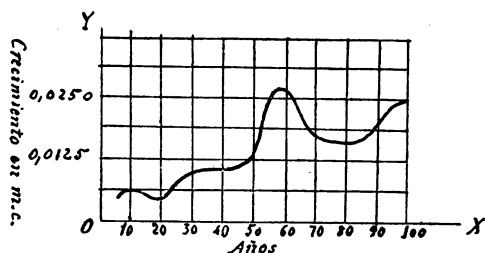


Fig. 100.

remos a dar un ejemplo sobre el asunto que pueda servir de guía en materia tan importante, digna, indudablemente, de estudio y de investigaciones conducentes a precisar bien los métodos que en cada caso convenga seguir.

Supongamos, en efecto, se quisiera estudiar la ley de crecimiento de un árbol aislado o de una masa de árboles en conjunto, en relación con la edad; la Geometría analítica nos da el sencillo medio de tomar en un eje de abscisas OX (fig. 100) y en una escala cualquiera los años de edad, y en un eje OY de ordenadas los crecimientos sucesivos del volumen, ya del árbol, o de la masa de árboles objeto de la experiencia. De este modo

obtendremos una cierta curva en la que es fácil estudiar algunos detalles, como, verbigracia, el momento del máximo crecimiento, sus períodos ascendente y descendente, la influencia de las operaciones de cultivo, como podas, claras, labores, riegos, abonos, etc.

Pero será, en general, difícil establecer la ecuación de la curva por los medios conocidos de análisis matemático, asunto que vamos a ver si facilita la representación nomográfica.

Si un árbol o una masa de árboles creciese cada año de un modo constante, con respecto al volumen adquirido hasta esa fecha, podríamos suponer que el volumen V en el año m es el resultado de colocar a interés compuesto durante n años y a un tanto por ciento t , el volumen v que el árbol tenía el año $m - n$.

Así ocurre realmente en cierto modo, puesto que cada año el árbol produce (fig. 101) una especie de cono AHB de

madera, a cuya formación contribuye todo el volumen leñoso M , adquirido hasta esa época. Podríamos, por tanto, expresar el volumen V por la fórmula

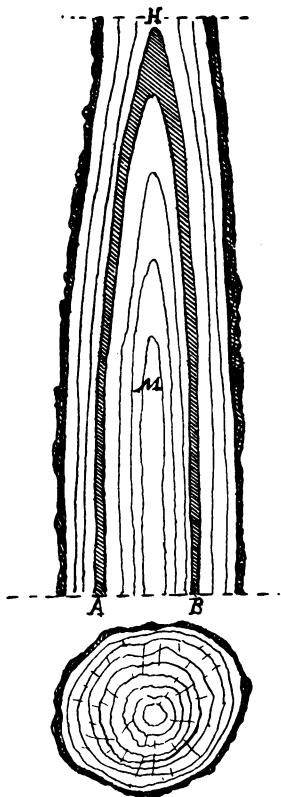


Fig. 101.

$$V = v(1 + t)^n$$

[1]

cuyo nomograma ya hemos visto en la figura 89 (lámina XXII), construido con los determinantes generadores

$$D_1 = \begin{vmatrix} n & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -\log(1+t) \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} -\log C & 0 & 1 \\ \log r & 10 & 1 \\ \mu & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

en los cuales ahora serían $C = V$ y $r = v$.

Para construir un ábaco de la [1] transformaremos D_1 y D_2 sin que se alteren en

$$D'_1 = \begin{vmatrix} n & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 - 10 \log(1+t) \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y

$$D'_2 = \begin{vmatrix} -\log V & 0 & 10 \\ -\log v & 1 & 11 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que dan las redes de rectas

$$[\alpha] \begin{cases} X = -\frac{10}{n} \\ Y = -[1 - \log(1+t)] \\ Y = -\mu X - 1 \end{cases} \quad [\beta] \begin{cases} X = \frac{\log V}{10} \\ Y = X \cdot \log v - 11 \\ Y = -\mu X - 1 \end{cases}$$

representadas esquemáticamente en la figura 102. En este ábaco se ve que, teniendo todas las rectas (n) tales como MN, M'N' la misma ordenada en el origen OS = -1, forman un radiante, y la clave no puede ser más sencilla, pues, dados, verbigracia, n_1 , t_1 y v_1 , se hallará V_1 , sin más que unir por una recta el punto N de intersección de las rectas acotadas t_1 y n_1 con el S, y leyendo la cota V_1 de la recta que pasa por el punto M

ley de distribución en el ábaco formado por el sistema de rectas $[n' (N_1 M_1)]$, (V) y (v) nos dará precisamente la expresión matemática de la ley de crecimiento buscada. Para ello bastará investigar la función $\phi(n)$, según la cual están distribuídas sobre el eje OY las ordenadas OR en el origen, con respecto a la edad, así como la función

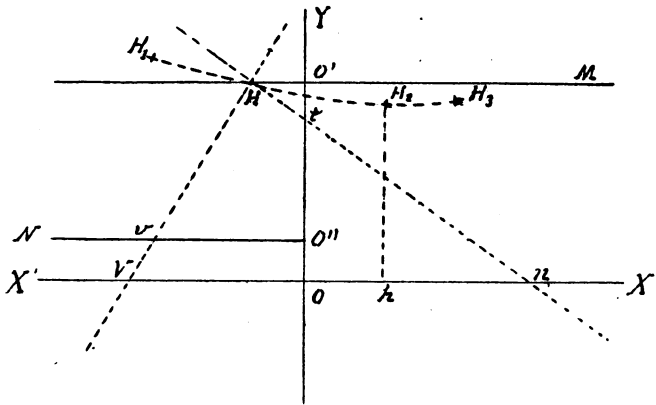


Fig. 103.

$f(n)$ con arreglo a la cual varían los coeficientes angulares de las rectas $M_1 N_1$. La ecuación de dichas rectas será entonces

$$Y \pm f(n) X \pm \phi(n) = 0$$

que, llevada a D'_2 , nos da el determinante

$$D''_2 = \begin{vmatrix} -\log V & 0 & 10 \\ -\log v & 1 & 11 \\ \pm \phi(u) & 1 & \pm \phi(n) \end{vmatrix} = 0$$

en el cual se contiene el ábaco $[V, v, n]$, que desarrollado da la ecuación

$$\pm f(n) = 0,1 \cdot \log V [\pm \phi(n) - 11] + \log v$$

entre las variables v , V y n , o sea la expresión matemática buscada para el árbol o masa de ellos objeto de los ensayos.

Otro procedimiento, quizá más sencillo, sería construir el nomograma de doble alineación concurrente contenido en D'_1 y D''_2 , formado por las escalas (fig. 103)

$$\begin{aligned}
 (n) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{n}{10} \\ y = 0 \end{array} \right\} & \text{Según OX} \\
 (t) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 : (1 - 10 \log (1 + t)) \end{array} \right\} & \text{Según OY} \\
 \mu \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 \end{array} \right\} & \text{Según O'M, paralela a OX.} \\
 (V) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\log V}{10} \\ y = 0 \end{array} \right\} & \text{Según OX'} \\
 (v) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\log v}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{array} \right\} & \text{Según O''N, paralela a OX'} \\
 (\mu) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 \end{array} \right\} & \text{Según O'M, paralela a OX}
 \end{aligned}$$

y cuya clave será, como sabemos, llevar un índice nH por los puntos de cotas n_1, t_1 ; ver el punto H en que dicho índice corta a $O'M$ y llevar otro índice Hv por el punto H y el de cota v_1 , leyendo en la escala (V) la cota V_1 de su punto de intersección.

Pero como t va disminuyendo con la edad según hemos dicho, los índices nH y vH que hagamos pasar por valores experimentales de n, t, v y V , no se cortarán sobre la escala binaria MH , sino que determinarán una serie de puntos H_1, H, H_2, H_3 etc., situados en una curva más o menos regular. Si, pues, acotamos los puntos H_1, H, H_2, H_3 etc., con los valores correspondientes de n , y consideramos el nomograma de simple [ali-

neación formado por las escalas $[v]$ $[V]$ y la curva (H), bastará estudiar las abscisas $Oh = f(n)$ y las ordenadas $hH_2 = \phi(n)$ de esta curva, para obtener su ecuación con respecto a los ejes coordenados OX, OY, y llevarla al determinante D'_2 , que será

$$D'_2 = \begin{vmatrix} -\log V & 0 & 10 \\ -\log v & 1 & 11 \\ f(n) & \phi(n) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y que, desarrollado, nos dará la fórmula

$$\mp f(n) = 0,1 \log V [1 - 11 \phi(n)] \pm \log v \cdot \phi(n)$$

expresiva de la ley de crecimiento que se busca.

Se comprende por lo dicho las ventajas del procedimiento nomográfico, pues es bastante más fácil descubrir las funciones $f(n)$, $\phi(n)$ y $\phi(n)$, reducidas al estudio de escalas, fáciles de comparar con los tipos conocidos, que buscar directamente la expresión matemática de la curva de la figura 100, y la razón, por tanto, ya indicada, de la importancia que para el Ingeniero puede tener esta clase de investigaciones, así como la necesidad de fijar y ampliar los métodos generales conducentes a tal fin.

ÍNDICE

	<u>Páginas.</u>
AL LECTOR.....	7

I.—PRELIMINARES

<i>Objeto y aplicaciones de la Nomografía.....</i>	8
<i>Idea general sobre los sistemas acotados. — Ábacos y nomogramas.....</i>	12
<i>Familias de ábacos: claves.....</i>	14
<i>Escalas.—Escala regular, escala logarítmica, escala segmentaria, escalas naturales, escalas derivadas, escalas transformadas.....</i>	16
<i>Construcción geométrica y lectura de las escalas.—Principio de los multiplicadores correspondientes.....</i>	25
<i>Anamorfosis.....</i>	29

II.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

<i>Ábacos cartesianos y su anamorfosis.....</i>	31
<i>Ábacos de escalas de igual soporte.....</i>	34

III.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE TRES VARIABLES

<i>Ábacos cartesianos.....</i>	37
<i>Ábacos polares.....</i>	42

<i>Anamorfosis.</i> —Anamorfosis circular, anamorfosis rectilínea.....	43
<i>Ábacos de redes rectilíneas y ábacos correlativos de puntos alineados: condiciones para que una ecuación dada sea representable por este procedimiento.</i> —Correlación entre los ábacos y los nomogramas.—Representación por ábacos y nomogramas de formas sencillas.....	49

IV.—REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE CUATRO VARIABLES

<i>Idea general: casos en que existe la representación sobre un plano, escalas binarias.....</i>	33
<i>Representación por redes de rectas y líneas acotadas: claves.</i> —Nomogramas proporcionales, de doble alineación concurrente, de doble alineación paralela y a escuadra....	87
<i>Método práctico para la construcción de ábacos y nomogramas de ecuaciones de formas sencillas.</i> —Doble alineación concurrente, paralela y a escuadra.—Observaciones sobre los módulos de las escalas.....	101

V.—NOMOGRAMAS DE ESCALAS MÓVILES

<i>Idea general.....</i>	117
<i>Reglas de cálculo.</i> —Reglas logarítmicas y reglas para cuatro variables.....	117 ^o
<i>Escalas giratorias.</i> —Círculo de cálculo, otros ábacos de escalas giratorias.....	122

VI.—INVESTIGACIÓN DE LEYES POR MEDIO DE LA NOMOGRAFÍA

<i>Nociones generales y métodos que se emplean.....</i>	127
---	-----

ÁBACOS Y NOMOGRAMAS

	Láminas.	Páginas.
ABACOS.—Del área del círculo.—Cartesiano...	I	32
Logarítmico.	II	33
Cartesiano...	III	34
De la multiplicación.—Cartesiano.....	V	38
Otra forma.....	VI	38
De elevación a potencias y extracción de raíces.....	VII	40
De la ecuación de segundo grado.....	VII	41
Polar de la ecuación $\alpha = \rho \cos \theta$	VIII	43
De la ecuación $r = \frac{f^2 + \frac{c^2}{4}}{2f}$	IX	46
De la fórmula de Pitágoras $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	X	48
Exagonal del área de la elipse.....	XI	66
Del volumen del cono.....	XIII	74
De escala giratoria para la exponen- cial $y = e^{\frac{x}{m}}$	XXIV	126
NOMOGRAMAS.—Del área del círculo.....	IV	36
Del volumen de la esfera.....	IV	36
De la ecuación $y = e^x$	IV	36
De la multiplicación.....	XI	66
De las fórmulas para el uso del taquí- metro.....	XII	70
De la ecuación exponencial $y = e^{\frac{x}{m}}$	XIV	78
Del volumen del paraboloides apolónico.	XV	79

	<u>Láminas.</u>	<u>Páginas.</u>
De la ecuación de tercer grado.....	XVI	80
De la ecuación $\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q}$	XVII	82
De la velocidad de salida del agua por orificio rectangular practicado en pa- red delgada.....	XVIII	83
De la ecuación $V = m \frac{\pi}{4} d^2 h$	XVI	80
De la ecuación $F = \frac{P v^3}{9,81 \cdot R}$	XIX	105
De la ecuación $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$	XIX	105
De medias, terceras y cuartas propor- cionales.....	XX	109
De la fórmula de interés simple.....	XX	109
Del área descortezable de un árbol....	XXI	111
De la fórmula de interés compuesto....	XXII	113
REGLAS DE CÁLCULO.—Para cubicación de ár- boles.....	XXIII	122
Para la fórmula de interés compuesto..	XXIII	122

LIBRERIA INTERNACIONAL DE ADRIÁN ROMO

5, ALCALÁ, 5.—MADRID

MANUALES ROMO

	Pesetas
Astolfoni. —La pila eléctrica.....	3,50
Bertollo. —Manual del minero y del buscador de Minas, 2. ^a edición.....	6
Colombo. —Manual del ingeniero, 5. ^a edición, corregida y aumentada.....	8
Chiovato. —Manual del obrero mecánico y del maestro de taller.....	4
Decref. —Kinesiterapia.....	4
Escriña. —Tablas de curvas.....	6
Galsberg. —Manual del montador electricista, 2. ^a edición.....	5
Gallo y Maturana. —Constitución y funcionamiento del automóvil a esencia, 2. ^a edición.....	5
Gherzi. —Galvanoplastia, 2. ^a edición.....	5
— Recetario industrial, 2. ^a edición, corregida y aumentada.....	8
Godos. —Manual del fabricante de chocolates, de pastas y de galletas.....	4
Goffi. —Manual del ingeniero mecánico y del proyectista industrial, 2. ^a edición, corregida y aumentada....	8
Ihering. —Tecnología mecánica.....	5
Macdonald. —El cultivo de secano. (The Dry Farming)....	4
Malavasi. —Vademécum del ingeniero constructor mecánico.....	10
Maneuvrler. —Tratado elemental de Mecánica.....	6
Marro. —Manual del ingeniero electricista.....	10
— Corrientes alternas, simples, bifásicas y trifásicas...	10
Mecklenburg. —Fundamentos experimentales de la Atómica.....	3,50
Morán. —Tratado de fototipia.....	1,50
Murani. —Ondas hertzianas y telégrafo sin hilos.....	7
Onofrio. —Industria de las conservas alimenticias.....	6
Perdoni. —Manual de hidráulica aplicada, 2. ^a edición.....	10
Piazzoli. —Instalaciones y explotaciones de alumbrado eléctrico, 2. ^a edición, 2 volúmenes.....	15
Ramsay (W.) —Química moderna.....	7
Riera. —Acumuladores eléctricos.....	3
Rocafull. —Tratado de fotografía industrial.....	2
Ronchetti. —Manual para los aficionados a la pintura... ..	8
Rossi. —Manual del licorista, 2. ^a edición.....	8
Sandrinelli. —Manual de resistencia de materiales y estabilidad de las construcciones.....	8
Spataro. —Manual del saneamiento de poblaciones.....	7
Thompson. —Electricidad y materia.....	3,50
Vacchelli. —Construcciones de hormigón y de cemento armado, 2. ^a edición.....	6
Vlada. —Manual del sport.....	8
Wetham. —Electricidad experimental.....	7

EXTRACTO DEL CATÁLOGO

	Pesetas
Baró. —Superficies alabeadas. (Apuntes para el curso de Geometría descriptiva de la Escuela de Ingenieros de Montes.....	3
— Vías de transporte. (Estudio económico. Carreteras. Caminos de montaña), tomo I.....	15
Montenegro. —Apuntes de funciones periódicas, sinusoidales o armónicas.....	8
Zafra (J. M. de). —Cálculo de estructuras, 2 volúmenes....	50
Misol. —Sombras y perspectiva, un volumen y atlas.....	10
— Elementos de las teorías de funciones y derivadas y sus aplicaciones analíticas, tomo I.....	15
Corral (J). —Nuevos métodos para resolver ecuaciones numéricas.....	7
Irlarte. —Apuntes de topografía.....	3
— Medición de superficies.....	5
Irlarte y Navarro. —Topografía fotográfica, un volumen y atlas, ptas.....	15
Jimenez. —Elementos de cálculo diferencial e integral, 2 volúmenes.....	10
Gaztelu. —Cálculos de estabilidad de los puentes.....	16
Ruiz Amado. —Tratado de topografía moderna, 2 volúmenes, ptas.....	50
García Cifré. —Teoría y manejo de la regla de cálculo.....	4
— Tratado de Aritmética.....	10
Bárcena. —Tratado de Taquimetría.....	7,50
Muñoz Madariaga. —Lecciones de Química aplicada.....	18
Archilla. —Principios fundamentales del cálculo diferencial, 2. ^a edición.....	7,50
Ruiz Castizo. —Tratado de Mecánica racional.....	27
Elizalde. —Curso de Geometría descriptiva, un tomo y atlas.	28
Ponte y Blanco. —Estereotomía.....	5
Giol y Soldevilla. —Tratado de acotaciones.....	3,50
Lafarga. —Sombras y perspectiva.....	15
Muñoz Madariaga. —Lecciones de Mineralogía.....	23
Bolívar y Calderón. —Elementos de Historia Natural.....	24
Andrade. —Geología.....	8
Arévalo. —Geología.....	12,50
Hartig. —Tratado de enfermedades de las plantas.....	10
Rebolledo. —Manual del constructor.....	11
— Tratado de construcción general.....	48
Soroa. —Manual y formulario del constructor.....	25
Olazábal. —Ordenación y valoración de montes.....	16
Pardo. —Carreteras.....	25
— El esparto.....	1,50
Artigas. —Alcornocales e industria corchera.....	40
Heyer. —Valoración de montes.....	4,50
Piccioli. —Montes y torrentes.....	8
Campo. —Legislación forestal.....	8
— Novísima legislación forestal.....	12

**THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW**

**AN INITIAL FINE OF 25 CENTS
WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN
THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY
WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH
DAY AND TO \$1.00 ON THE SEVENTH DAY
OVERDUE.**

OCT 9 1933

LD 21-50m-1,'33

Baro, F.

Nociones de nomografia.

B3

18 1924

OCT 9 1933

Allen
Bowling

DEC 18 1934
SEP 25 1933

451575

QA219

B3

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

